0000171368289999

高知工科大学

2012年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ xの2次方程式 $x^2-2x-1=0$ の解を α, β $(\alpha<\beta)$ とし，正の整数 n に対して

$$x_n=\frac{\beta^n-\alpha^n}{2\sqrt{2}}$$

とおく．次の各問に答えよ．

(1) x_1, x_2 を求めよ．

(2) $x_{n+2}=2x_{n+1}+x_n$ が成り立つことを証明せよ．

(3) x_{3n} は5の倍数であることを証明せよ．

(1) $\alpha=1-\sqrt{2}$, $\beta=1+\sqrt{2}$ であるから

$$x_1=\frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{2}}=1,\quad x_2=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=2$$

$\therefore$ $\underline{x_1=1,\ x_2=2}$ //

(2)
$$\begin{aligned}x_{n+2}&=\frac{\beta^{n+2}-\alpha^{n+2}}{2\sqrt{2}}\\&=\frac{(\beta+\alpha)(\beta^{n+1}-\alpha^{n+1})+\alpha^{n+1}\beta-\alpha\beta^{n+1}}{2\sqrt{2}}\\&=\frac{(\alpha+\beta)(\beta^{n+1}-\alpha^{n+1})-\alpha\beta(\beta^n-\alpha^n)}{2\sqrt{2}}\\&=2\cdot\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{2\sqrt{2}}+\frac{\beta^n-\alpha^n}{2\sqrt{2}}\quad(\because\ \alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1)\\&=2x_{n+1}+x_n\quad\blacksquare\end{aligned}$$

(3)の(注)
帰納法においてすべてのx_nが
整数となることを書いていない
場合，減点とする．

(3) 数学的帰納法で証明する

(i) $n=1$ のとき．

(2)より $x_3=2x_2+x_1=5$ $\therefore$ 成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると．x_{3k} は5の倍数である．

(2)より．
$$\begin{aligned}x_{3k+3}&=2x_{3k+2}+x_{3k+1}\\&=2(2x_{3k+1}+x_{3k})+x_{3k+1}\\&=5x_{3k+1}+2x_{3k}\end{aligned}$$

(1),(2)より．すべてのnに対してx_nが整数であることが帰納的に示されるから．x_{3k+1}は整数
また、x_{3k}は5の倍数であるから，x_{3k+3}は5の倍数である　$\therefore$ $n=k+1$のとき成り立つ

(i),(ii)より すべてのnについて．x_{3n}は5の倍数である $\blacksquare$