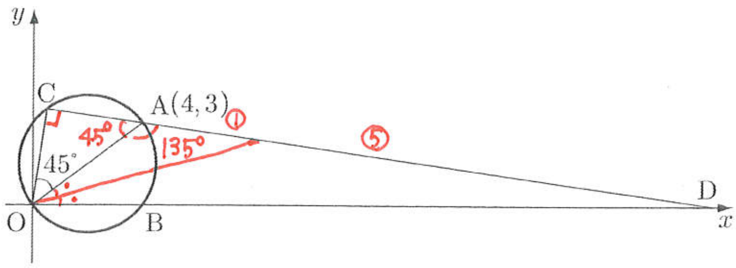
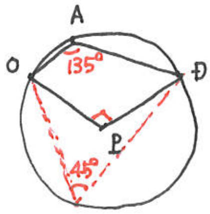
豊橋技術科学大学

2014 年 工学部 第 2 問

数理 石井K

$\boxed{2}$ xy 平面上に 2 点 O(0, 0)，A(4, 3) を直径の両端とする円がある．図のようにこの円と x 軸との原点以外の交点を B，線分 OA に関して B と反対側の円周上に $\angle \mathrm{COA} = 45°$ を満たす点 C をとり，線分 CA の延長線と x 軸との交点を D とする．以下の問いに答えよ．





(1) △AOD の外心を P として，∠OPD の大きさを求めよ．

(2) 点 D の座標を求めよ．

(3) △AOD の外接円の方程式を求めよ．

(4) ∠AOB の二等分線と線分 AD との交点を E とし，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を成分表示せよ．

(1) 右上の図より．

$\angle \mathrm{OPD} = (180° - \angle \mathrm{OAD}) \times 2 = 90°$ //

(2) C は A を原点のまわりに反時計回りに 45° 回転させ，長さを $\frac{1}{\sqrt{2}}$ にしたもの

なので，C を表す複素数を γ とおくと，$\gamma = (4+3i)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \gamma = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$ $\quad\therefore \mathrm{C}\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

$\therefore$ 直線 AC の傾きは，$\dfrac{3-\frac{7}{2}}{4-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{7}$ $\quad\therefore$ 直線 AC : $y = -\frac{1}{7}(x-4)+3$

この式に $y=0$ を代入して，$x = 25$ $\quad\therefore \mathrm{D}(25, 0)$ //

(3) 正弦定理より △AOD の外接円の半径を R とおくと，

$\dfrac{\mathrm{OD}}{\sin 135°} = 2R \quad \therefore R = \frac{25}{2}\sqrt{2}$

また，P は線分 OD の垂直二等分線上にあるので $\mathrm{P}\left(\frac{25}{2}, t\right)$ $(t<0)$ とおける

$\mathrm{OP} = R = \frac{25}{2}\sqrt{2}$ より，$\left(\frac{25}{2}\right)^2 + t^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2\cdot 2 \quad \therefore t = -\frac{25}{2}$

$\therefore$ 方程式は，$\left(x-\frac{25}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{25}{2}\right)^2 = \frac{625}{2}$ $\quad\therefore x^2 - 25x + y^2 + 25y = 0$ //

(4) OA = 5，OD = 25 より，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

$= \left(\frac{5}{6}\cdot 4, \frac{5}{6}\cdot 3\right) + \left(\frac{25}{6}, 0\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$ //