

2014年 理工学部 第3問

3 $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \log(a_n + e)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)で定まる数列 $\{a_n\}$ の収束について調べたい。以下の問いに答えなさい。

- (1) 方程式 $x = \log(x + e)$ は $x > 0$ の範囲でただ1つの実数解 β をもつことを証明しなさい。
- (2) すべての自然数 n について $0 \leq a_n < \beta$ が成り立つことを証明しなさい。
- (3) $0 < a < b$ のとき $\log b - \log a < \frac{b-a}{a}$ が成り立つことを証明しなさい。
- (4) すべての自然数 n について $\beta - a_{n+1} < \frac{1}{e}(\beta - a_n)$ が成り立つことを証明し、これを用いて $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \beta$ を示しなさい。