

2014年工学部・生命環境(生命工)第2問

1枚目/2枚

数理
石井K

2 実数を成分とする2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が, 実数 k に対し, $A^2 - kA = (k-3)E$ を満たすとする。ただし, E は2次の単位行列である。

(1) $b \neq 0$ または $c \neq 0$ のとき, $a+d$ および $ad-bc$ を k を用いた式で表せ。

(2) 実数 k が $A \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ を満たすとき, k の値を求めよ。

(3) k を定数として, bc が最大となるような a, d とそのときの bc を k を用いた式で表せ。また, そのような行列 A の例を k を用いて1つあげよ。

(4) k を定数として, 行列 A は bc が最大となる行列とする。行列 A で表される1次変換が, 直線 $y=kx$ 上の各点 P を P 自身に移すとするとき, $A=E$ となることを示せ。

$$(1) A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} \text{ より, } A^2 - kA = \begin{pmatrix} a^2+bc-ka & ab+bd-kb \\ ac+cd-kc & bc+d^2-kd \end{pmatrix}$$

$$\therefore (1,2)\text{-成分, } (2,1)\text{-成分に注目して, } b(a+d-k) = 0 \text{ かつ } c(a+d-k) = 0$$

$$\text{よって, } b=c=0 \text{ または } a+d-k=0$$

$$b \neq 0 \text{ または } c \neq 0 \text{ より, } a+d-k=0 \quad \therefore \underline{a+d=k}$$

$$(1,1)\text{-成分に注目して, } a^2+bc-ka = k-3$$

$$a = k-d \text{ より, } a \cdot (k-d) + bc - ka = k-3 \quad \therefore \underline{ad-bc = 3-k}$$

$$(2) A \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bk \\ c+dk \end{pmatrix} \quad \therefore a+bk=1 \dots \textcircled{1}, \quad c+dk=k \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より, $k=0$ のとき, $a=1, c=0$ これは(1)の2式をみたさず不適 よって $k \neq 0$

このとき, $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より, $b = \frac{1-a}{k}, c = k(1-d)$ これを $ad-bc = 3-k$ に代入して

$$ad - \frac{1-a}{k} \cdot k(1-d) = 3-k \quad \text{これを解いて, } \underline{k=2}$$

(3) $a+d=k$ より, $d=k-a$ これを $ad-bc = 3-k$ に代入して,

$$bc = a(k-a) - 3 + k$$

$$= -a^2 + ka - 3 + k$$

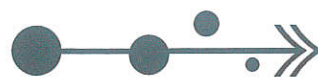
$$= -\left(a - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{k^2}{4} + k - 3$$

$\therefore bc$ が最大となるのは, $a=d = \frac{k}{2}$ のときで, そのとき, $bc = \frac{k^2}{4} + k - 3$

$$bc = \frac{1}{4}(k^2 + 4k - 12) = \frac{1}{4}(k+6)(k-2) \quad \therefore b = \frac{1}{2}(k+6), \quad c = \frac{1}{2}(k-2) \text{ とすると,}$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} k & k+6 \\ k-2 & k \end{pmatrix}$$

1つの例



2014年工学部・生命環境(生命工)第2問

2枚目/2枚

2 実数を成分とする2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が, 実数 k に対し, $A^2 - kA = (k-3)E$ を満たすとする. ただし, E は2次の単位行列である.

(1) $b \neq 0$ または $c \neq 0$ のとき, $a+d$ および $ad-bc$ を k を用いた式で表せ.

(2) 実数 k が $A \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ を満たすとき, k の値を求めよ.

(3) k を定数として, bc が最大となるような a, d とそのときの bc を k を用いた式で表せ. また, そのような行列 A の例を k を用いて1つあげよ.

(4) k を定数として, 行列 A は bc が最大となる行列とする. 行列 A で表される1次変換が, 直線 $y=kx$ 上の各点 P を P 自身に移すとする, $A=E$ となることを示せ.

(4)(3)より $A = \begin{pmatrix} \frac{k}{2} & b \\ c & \frac{k}{2} \end{pmatrix}$ かつ $bc = \frac{k^2}{4} + k - 3$ と表せる

また, (2)より $k=2$ となるので,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \text{ かつ } bc = 0$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ が成り立つので}$$

$$\begin{pmatrix} 1+2b \\ c+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ よって, } b=c=0$$

$$\text{したがって, } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \quad \square$$