



2014年 総合理工 (数理・情報システム以外) 第3問

数理
石井K

3 点(0, 5)を通る直線 l と楕円 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ を考える。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 楕円 C と共有点をもつ直線 l の方程式をすべて求めよ。
 (2) 楕円 C と直線 l が接するとき、その接点の座標を求めよ。
 (3) 楕円 C と直線 l が第一象限で接するとき、 C と l および y 軸で囲まれた図形を y 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1) l の傾きを k とおくと、 $l: x=0$ または、

$$l: y = kx + 5$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{1}{9}(kx+5)^2 - 1 = 0 \text{ が実数解をもてばよい。}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{4} + \frac{k^2}{9}\right)x^2 + \frac{10}{9}kx + \frac{25}{9} - 1 = 0 \text{ の判別式 } D \text{ は}$$

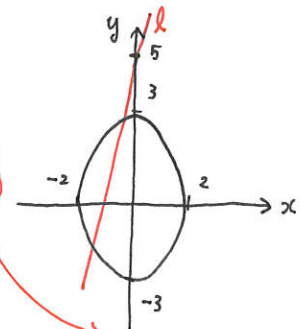
$$D = \left(\frac{10}{9}k\right)^2 - 4\left(\frac{1}{4} + \frac{k^2}{9}\right) \cdot \frac{16}{9}$$

$$= \frac{36}{81}k^2 - \frac{16}{9}$$

$$D \geq 0 \text{ より}$$

$$k \geq 2, k \leq -2$$

$$\therefore l \text{ の方程式は } \begin{cases} x=0 \text{ または,} \\ y=kx+5 \text{ (ただし, } k \geq 2 \text{ または } k \leq -2) \end{cases}$$



このことは
 多くの問題で
 減点対象となる。
 満点を目指すなら
 与えける習慣に
 よう!

(2) 接する \Leftrightarrow (1) の $D=0$ のとき

$$\therefore k = \pm 2 \text{ のとき, 方程式は } \frac{25}{36}x^2 \pm \frac{20}{9}x + \frac{16}{9} = 0$$

$$\therefore x = \pm \frac{8}{5} \quad \therefore \text{接点は } \left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right), \left(-\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

$$(3) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{4 - \frac{4}{9}y^2}$$

$$\text{第1象限より } x > 0 \quad \therefore x = 2\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}$$

$$\therefore V = \pi \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^2 \times \left(5 - \frac{9}{5}\right) \times \frac{1}{3} - \pi \int_{\frac{9}{5}}^3 \left(2\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}\right)^2 dy$$

$$= \frac{1024}{375} \pi - 4\pi \left[y - \frac{y^3}{27} \right]_{\frac{9}{5}}^3$$

$$= \frac{16}{15} \pi$$

