0000034905699999

岡山大学

2012年 理系 第3問

増田

$\boxed{3}$ aを正の定数とし，座標平面上の2曲線 $C_1 : y = e^{x^2}$，$C_2 : y = ax^2$ を考える．このとき以下の問いに答えよ．ただし必要ならば $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ であることを用いてもよい．

(1) $t > 0$ の範囲で，関数 $f(t) = \dfrac{e^t}{t}$ の最小値を求めよ．

(2) 2曲線 C_1，C_2 の共有点の個数を求めよ．

(3) C_1，C_2 の共有点の個数が2のとき，これらの2曲線で囲まれた領域を y 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ．

(1) $f(t) = \dfrac{e^t}{t}$

$f'(t) = \dfrac{e^t}{t} - \dfrac{e^t}{t^2} = \dfrac{e^t}{t^2}(t-1)$

$t=1$ のとき、$f'(t)=0$

増減表は以下のようになる。

t	$+0$	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	最小	$\nearrow$	$+\infty$

最小値は $t=1$ のときで、

$f(1) = \underline{e}$ //

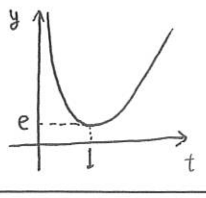
(2) $x^2 = t$ とおくと、$x=0$ のときは $e^0 \neq 0$ となり共有点はもたないので、$t>0$ の範囲で考えることができて、

共有点は　$e^t = at$

つまり　$a = \dfrac{e^t}{t}$　$(\because t \neq 0)$

を満たす。

(1)より、$y = \dfrac{e^t}{t}$ のグラフの概形は

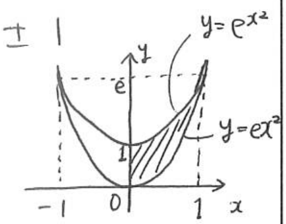


左図と $y=a$ の直線の共有点の個数を調べて、

$\begin{cases} 0<a<e \text{ のとき 共有点 なし} \\ a=e \text{ のとき 共有点 2個} \ (x^2=1, x=\pm 1) \\ a>e \text{ のとき 共有点 4個} \ (x=\pm\sqrt{t_1}, \pm\sqrt{t_2}) \end{cases}$ //

(3) 共有点の個数が2のとき、(2)より交点の x 座標は ± 1

グラフの概形は



$y_1 = e \cdot x_1^2$，$y_2 = e^{x_2^2}$ とおくと、

図の斜線部を y 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は、

$\displaystyle\int_0^e \pi x_1^2 \, dy_1 - \int_1^e \pi x_2^2 \, dy_2$

$\displaystyle= \int_0^e \pi \frac{y_1}{e} \, dy_1 - \int_1^e \pi \log_e y_2 \, dy_2$

$\displaystyle= \frac{\pi}{e}\left[\frac{y_1^2}{2}\right]_0^e - \pi\left[y_2 \log_e y_2 - y_2\right]_1^e$

$= \dfrac{e\pi}{2} - \pi(e - e + 1)$

$= \underline{\left(\dfrac{e}{2} - 1\right)\pi}$ //