



2011年理系第5問

5 正数  $r$  に対して,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = r$  とおき, 数列  $\{a_n\}$  を次の漸化式で定める.

$$a_{n+1} = a_n + r_n(a_n - a_{n-1}) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

ただし  $a_n$  と  $a_{n-1}$  から漸化式を用いて  $a_{n+1}$  を決める際には硬貨を投げ, 表がでたとき  $r_n = \frac{r}{2}$ , 裏がでたとき  $r_n = \frac{1}{2r}$  とする. ここで表がでる確率と裏がでる確率は等しいとする.  $a_n$  の期待値を  $p_n$  とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1)  $p_3$  および  $p_4$  を,  $r$  を用いて表せ.
- (2)  $n \geq 3$  のときに  $p_n$  を,  $n$  と  $r$  を用いて表せ.
- (3) 数列  $\{p_n\}$  が収束するような正数  $r$  の範囲を求めよ.
- (4)  $r$  が (3) で求めた範囲を動くとき, 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$  の最小値を求めよ.