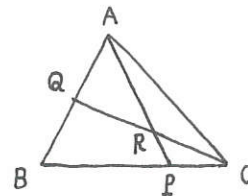


2016年医学部第1問

1 $\triangle ABC$ において、 $AB = \sqrt{3}$ 、 $BC = \sqrt{5}$ 、 $AC = 2$ とする。辺 BC 上に点 B と異なる点 P があり、 $AP = \sqrt{3}$ とする。また、辺 AB の中点を Q 、線分 AP と線分 CQ との交点を R とする。このとき、次の間に答えよ。

- (1) 内積 $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ と $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ。
 (2) \vec{AP} を \vec{AB} と \vec{AC} を用いて表せ。
 (3) $\triangle AQR$ の面積 T を求めよ。



$$(1) |\vec{BC}|^2 = |\vec{AC} - \vec{AB}|^2 \\ = |\vec{AC}|^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + |\vec{AB}|^2$$

$$\text{よって、} (\sqrt{5})^2 = 2^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + (\sqrt{3})^2$$

$$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3 \cdot 4 - 1^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$(2) \vec{AP} = s\vec{AB} + (1-s)\vec{AC} \quad (0 < s < 1) \text{ とおくと、}$$

$$|\vec{AP}|^2 = s^2 |\vec{AB}|^2 + 2s(1-s)\vec{AB} \cdot \vec{AC} + (1-s)^2 |\vec{AC}|^2$$

$$\therefore 3 = 3s^2 + 2s(1-s) + 4(1-s)^2$$

$$\therefore 5s^2 - 6s + 1 = 0$$

$$(5s-1)(s-1) = 0$$

$$0 < s < 1 \text{ より、} s = \frac{1}{5} \quad \therefore \vec{AP} = \frac{1}{5}\vec{AB} + \frac{4}{5}\vec{AC}$$

(3) メネラウスの定理より、

$$\frac{CP}{PB} \cdot \frac{AB}{AQ} \cdot \frac{QR}{RC} = 1$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{QR}{RC} = 1 \quad \therefore QR : RC = 2 : 1$$

$$\therefore T = S \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{11}}{6}$$