

2015年文系第1問

1 3辺の長さが2, 3, 4の三角形について次の問いに答えよ.

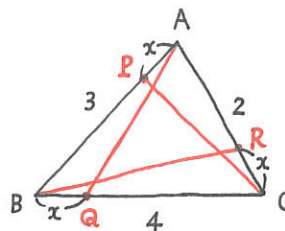
- (1) 内角が最大の頂点をA, 最小の頂点をBとするとき, $\cos \angle A$, $\cos \angle B$ を求めよ.
 (2) 残りの頂点をCとする. また3点P, Q, Rはそれぞれ辺AB, BC, CA上の点で, $AP = BQ = CR$ をみたすとする. このとき, $AQ^2 + BR^2 + CP^2$ の最大値と最小値を求めよ.

(1) 最大角 \leftrightarrow 最大辺, 最小角 \leftrightarrow 最小辺 は対応するので

右図のようになる. \therefore 余弦定理より,

$$\cos \angle A = \frac{3^2 + 2^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = -\frac{1}{4}, \quad \cos \angle B = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{7}{8}$$

$$\text{同様にすると, } \cos \angle C = \frac{2^2 + 4^2 - 3^2}{2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{11}{16}$$



(2) $AP = BQ = CR = x$ ($0 \leq x \leq 2$) とおくと,

余弦定理より,

$$\begin{aligned} AQ^2 &= 3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \cos \angle B \\ &= x^2 - \frac{21}{4}x + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BR^2 &= 4^2 + x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x \cdot \cos \angle C \\ &= x^2 - \frac{11}{2}x + 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CP^2 &= 2^2 + x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x \cdot \cos \angle A \\ &= x^2 + x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore AQ^2 + BR^2 + CP^2 &= x^2 - \frac{21}{4}x + 9 + x^2 - \frac{11}{2}x + 16 + x^2 + x + 4 \\ &= 3x^2 - \frac{39}{4}x + 29 \\ &= 3\left(x^2 - \frac{13}{4}x\right) + 29 \\ &= 3\left(x - \frac{13}{8}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{13}{8}\right)^2 + 29 \\ &= 3\left(x - \frac{13}{8}\right)^2 + \frac{1349}{64} \end{aligned}$$

\therefore 最大値は, 29 ($x=0$ のとき), 最小値は, $\frac{1349}{64}$ ($x = \frac{13}{8}$ のとき)

