2016年 理系 第2問

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)=x(x^2-4x+3)$ の極値を求めよ.

(2) k を定数とするとき，方程式 $x|x^2-4x+3|=k$ の異なる実数解の個数を求めよ.

(1) $f(x)=x^3-4x^2+3x$

$\therefore f'(x)=3x^2-8x+3$

$\therefore f'(x)=0$ となるのは，$x=\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$ のとき

ここで $f'(x)=0$ のとき，$x^2=\dfrac{8}{3}x-1$ より，

$\alpha=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$，$\beta=\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(\alpha)&=\alpha\cdot\alpha^2-4\alpha^2+3\alpha\\ &=(\alpha-4)\cdot\left(\tfrac{8}{3}\alpha-1\right)+3\alpha\\ &=\tfrac{8}{3}\left(\tfrac{8}{3}\alpha-1\right)-\tfrac{26}{3}\alpha+4\\ &=-\tfrac{14}{9}\alpha+\tfrac{4}{3}\\ &=\frac{-20+14\sqrt{7}}{27}\end{aligned}$$

$f(\beta)$ も同様に計算すると，

$$\begin{aligned} f(\beta)&=-\tfrac{14}{9}\beta+\tfrac{4}{3}\\ &=\frac{-20-14\sqrt{7}}{27}\end{aligned}$$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{-20+14\sqrt{7}}{27}$	$\searrow$	$\dfrac{-20-14\sqrt{7}}{27}$	$\nearrow$

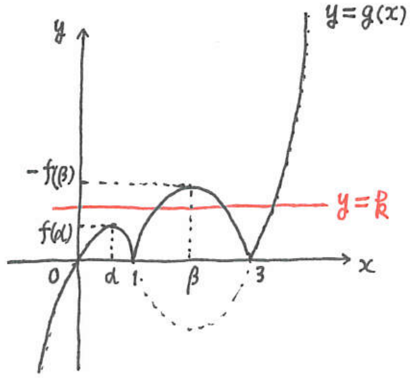
$\therefore$ 右の増減表より

$$\begin{cases} \text{極大値 } \dfrac{1}{27}(-20+14\sqrt{7}) & \left(x=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\text{ のとき}\right)\\ \text{極小値 } \dfrac{1}{27}(-20-14\sqrt{7}) & \left(x=\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\text{ のとき}\right)\end{cases}$$

(2) $g(x)=x|x^2-4x+3|$ とおくと

$g(x)=x|(x-1)(x-3)|$ より

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\leqq 1,\ 3\leqq x)\\ -f(x) & (1\leqq x\leqq 3)\end{cases}$$



右のグラフより，

$$\begin{cases} 1\text{個} & \left(k<0,\ \dfrac{20+14\sqrt{7}}{27}<k\text{ のとき}\right)\\ 2\text{個} & \left(k=\dfrac{20+14\sqrt{7}}{27}\text{ のとき}\right)\\ 3\text{個} & \left(k=0,\ \dfrac{-20+14\sqrt{7}}{27}<k<\dfrac{20+14\sqrt{7}}{27}\text{ のとき}\right)\\ 4\text{個} & \left(k=\dfrac{-20+14\sqrt{7}}{27}\text{ のとき}\right)\\ 5\text{個} & \left(0<k<\dfrac{-20+14\sqrt{7}}{27}\text{ のとき}\right)\end{cases}$$