2012年 第2問

$\boxed{2}$ 平面上のベクトル $\overrightarrow{a_n}$，$\overrightarrow{b_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を，$\overrightarrow{a_1}=(4,\ 0)$，$\overrightarrow{b_1}=(0,\ 4)$ と関係式

$$\overrightarrow{a_{n+1}}=\frac{3\overrightarrow{a_n}+\overrightarrow{b_n}}{4},\quad \overrightarrow{b_{n+1}}=\frac{\overrightarrow{a_n}-3\overrightarrow{b_n}}{4}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める．さらに原点をOとし，$\overrightarrow{a_n}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}$，$\overrightarrow{b_n}=\overrightarrow{\mathrm{OB}_n}$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{b_2}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{a_{n+2}}$ を $\overrightarrow{a_n}$ で表せ．

(3) $\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ の面積を S_n とするとき，$\dfrac{S_{n+1}}{S_n}$ の値を求めよ．

(4) $S_1+S_2+\cdots+S_n>21$ をみたす最小の自然数 n を求めよ．ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする．