

2011年 基幹理工・創造理工・先進理工 第3問

3 $f(x) = \frac{\log x}{x}$ とする. 以下の問に答えよ.

- (1) $y = f(x)$ のグラフの概形を次の点に注意して描け: $f(x)$ の増減, グラフの凹凸, $x \rightarrow +0$, $x \rightarrow \infty$ のときの $f(x)$ の挙動.
- (2) n を自然数とする. $k = 1, 2, \dots, n$ に対して x が $e^{\frac{k-1}{n}} \leq x \leq e^{\frac{k}{n}}$ を動くときの $f(x)$ の最大値を M_k , 最小値を m_k とし,

$$A_n = \sum_{k=1}^n M_k (e^{\frac{k}{n}} - e^{\frac{k-1}{n}})$$

$$B_n = \sum_{k=1}^n m_k (e^{\frac{k}{n}} - e^{\frac{k-1}{n}})$$

とおく. A_n, B_n を求めよ.

- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ および $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ を求めよ.
- (4) 各 n に対して $B_n < \int_1^e f(x) dx < A_n$ であることを示せ.