0001826363718999

弘前大学

2014 年 文系 第 3 問

数理 石井K

$\boxed{3}$ $a>0,\ b>1$ とする．関数 $f_1(x)=-2x^2-x+3$ と $f_2(x)=ax^2-a(b+1)x+ab$ に対し，関数 $f(x)$ を $x \leqq 1$ のとき $f(x)=f_1(x)$，$x>1$ のとき $f(x)=f_2(x)$ と定める．また関数 $g(x)$ を $g(x)=\int_{-\frac{3}{2}}^{x} f(t)\,dt$ と定める．次の問いに答えよ．

(1) 微分係数 $f_1{}'(1)$ と $f_2{}'(1)$ が等しくなるための $a,\ b$ の関係式を求めよ．

(2) $a,\ b$ が (1) で求めた関係式を満たすとする．$g(x)$ の最小値を b の値によって場合分けをして求めよ．

(1) $f_1'(x)=-4x-1$, $f_2'(x)=2ax-ab-a$ より．

$f_1'(1)=-5$, $f_2'(1)=a-ab$ $\quad \therefore\ \underline{ab-a-5=0}$ //

(2) (i) $x<1$ のとき．

$$g(x)=\int_{-\frac{3}{2}}^{x} -2t^2-t+3\,dt$$

$$\therefore\ g'(x)=-2x^2-x+3=-(x-1)(2x+3)$$

(ii) $x>1$ のとき．

$$g(x)=\int_{-\frac{3}{2}}^{1} -2t^2-t+3\,dt+\int_{1}^{x} at^2-a(b+1)t+ab\,dt$$

$$\therefore\ g'(x)=a(x-1)(x-b)$$

$a>0,\ b>1$ より．増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	b	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$g\left(-\tfrac{3}{2}\right)=0,\quad g(b)=\int_{-\frac{3}{2}}^{1} -2(t-1)\left(t+\tfrac{3}{2}\right)dt+\int_{1}^{b} a(t-1)(t-b)\,dt$$

$$\therefore\ g(b)=2\cdot\frac{1}{6}\left(1+\frac{3}{2}\right)^3+\left(-\frac{a}{6}\right)\cdot(b-1)^3$$

(1) の結果より．$a=\dfrac{5}{b-1}$ なので

$$=\frac{125}{24}-\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{b-1}\cdot(b-1)^3=\frac{125}{24}-\frac{5}{6}(b-1)^2$$

ここで，$\dfrac{125}{24}-\dfrac{5}{6}(b-1)^2<0$ となるのは，$b>\dfrac{7}{2}$ のとき．

以上より．

$g(x)$ の最小値は．
$$\begin{cases} 0 & \left(1<b\leqq\frac{7}{2}\text{ のとき}\right) \\ \dfrac{125}{24}-\dfrac{5}{6}(b-1)^2 & \left(b>\frac{7}{2}\text{ のとき}\right)\end{cases}$$ //