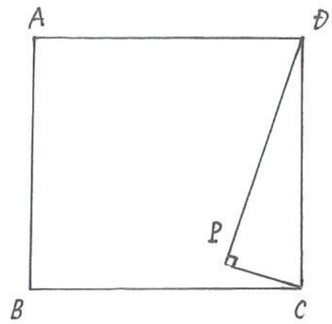
愛媛大学

2016年 医学部 第5問

$\boxed{5}$ 正方形ABCDの内部の点Pに対して ∠CPDが直角であるとき，$\dfrac{BP}{AP}$ の最大値を求めよ．

正方形の一辺の長さは，辺の長さの比 $\dfrac{BP}{AP}$ に無関係なので



$A(-1,1)$，$B(-1,-1)$，$C(1,-1)$，$D(1,1)$

$P(x,y)$ ただし，$|x|<1$，$|y|<1$ とする．

$AP^2=(x+1)^2+(y-1)^2$，$BP^2=(x+1)^2+(y+1)^2$

よって，$\left(\dfrac{BP}{AP}\right)^2=\dfrac{x^2+y^2+2x+2y+2}{x^2+y^2+2x-2y+2}$

ここで，$CP\perp DP$ より，$\dfrac{y+1}{x-1}\cdot\dfrac{y-1}{x-1}=-1$

よって，$y^2-1=-x^2+2x-1$　　$\therefore\ x^2+y^2-2x=0$

$(x-1)^2+y^2=1$

$x=1+\cos\theta$，$y=\sin\theta$　$\left(\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3}{2}\pi\right)$ とおくことができる．

$$\therefore\ \left(\frac{BP}{AP}\right)^2=\frac{2\cos\theta+\sin\theta+3}{2\cos\theta-\sin\theta+3}$$

$$=1+\frac{2\sin\theta}{2\cos\theta-\sin\theta+3}$$

これを $f(\theta)$ とおくと，$f'(\theta)=\dfrac{2\cos\theta(2\cos\theta-\sin\theta+3)-2\sin\theta(-2\sin\theta-\cos\theta)}{(2\cos\theta-\sin\theta+3)^2}$

$$=\frac{2(2+3\cos\theta)}{(2\cos\theta-\sin\theta+3)^2}$$

θ	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	$\left(\frac{3}{2}\pi\right)$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$\left(\frac{1}{2}\right)$

ただし，$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi<\beta<\dfrac{3}{2}\pi$ で

$$\begin{cases}\cos\alpha=\cos\beta=-\dfrac{2}{3} \text{ をみたすものとする．}\\ \sin\alpha=\dfrac{\sqrt5}{3},\ \sin\beta=-\dfrac{\sqrt5}{3}\end{cases}$$

よって，$f(\theta)$ の最大値は $f(\alpha)=\dfrac{3+\sqrt5}{2}$

そのとき $\dfrac{BP}{AP}=\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt5}{4}}=\underline{\dfrac{\sqrt5+1}{2}}$ //