0001866273318999

京都工芸繊維大学

2014年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) $x > 0$ のとき，不等式 $2 - x < (2 + x)e^{-x}$ が成り立つことを証明せよ．

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{1}{2}}(2 - x)\,dx$ および $\int_0^{\frac{1}{2}}(2 + x)e^{-x}\,dx$ の値を求めよ．

(3) (1) と (2) を用いて，不等式 $\frac{3}{5} < e^{-\frac{1}{2}} < \frac{17}{28}$ が成り立つことを証明せよ．

(1) $f(x) = (2+x)e^{-x} - (2-x)$ とおくと．

$$f'(x) = e^{-x} - (2+x)e^{-x} + 1$$
$$= 1 - (1+x)e^{-x}$$
$$f''(x) = -e^{-x} + (1+x)e^{-x}$$
$$= xe^{-x}$$

$x > 0$ より．$f''(x) > 0$ $\therefore$ $f'(x)$ は単調増加．

$\therefore$ $f'(x) > f'(0) = 0$ $\therefore$ $f'(x) > 0$ より．$f(x)$ も単調増加．

$\therefore$ $f(x) > f(0) = 0$ $\therefore$ $f(x) > 0$ より．$x > 0$ のとき．$2 - x < (2+x)e^{-x}$ ■

(2) $\int_0^{\frac{1}{2}}(2-x)\,dx = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{8} = \underline{\frac{7}{8}}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(2+x)e^{-x}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} -(2+x)(e^{-x})'\,dx = \left[-(2+x)e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} -e^{-x}\,dx$$
$$= -\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}} + 2 + \left[-e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= \underline{3 - \frac{7}{2\sqrt{e}}}$$

(3) (1) と (2) より．$\int_0^{\frac{1}{2}}(2-x)\,dx < \int_0^{\frac{1}{2}}(2+x)e^{-x}\,dx$

$\therefore$ $\frac{7}{8} < 3 - \frac{7}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ これより．$e^{-\frac{1}{2}} < \frac{17}{28}$ …①

一方，(1) の不等式に $x = \frac{1}{2}$ を代入して，$\frac{3}{2} < \frac{5}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ $\therefore$ $\frac{3}{5} < e^{-\frac{1}{2}}$ …②

①，② より．$\underline{\frac{3}{5} < e^{-\frac{1}{2}} < \frac{17}{28}}$ ■