2014年 理系 第3問

3 座標平面上の楕円

$$\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{4}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 楕円①と直線 $y=x+a$ が交点をもつときの a の値の範囲を求めよ．

(2) $|x|+|y|=1$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体がなす図形の概形をかけ．

(3) 点 $(x,\ y)$ が楕円①上を動くとき，$|x|+|y|$ の最大値，最小値とそれを与える $(x,\ y)$ をそれぞれ求めよ．

(1) ①に $y=x+a$ を代入して．

$$\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(x+a-1)^2}{4}=1 \iff x^2+4x+4+4\{x^2+2(a-1)x+(a-1)^2\}-16=0$$

$$\iff 5x^2+(8a-4)x+4(a-1)^2-12=0$$

この判別式を D とおくと．$D/4=(4a-2)^2-5\{4(a-1)^2-12\}\geqq 0$

$\therefore\ a^2-6a-11\leqq 0 \quad \therefore\ \underline{3-2\sqrt{5}\leqq a\leqq 3+2\sqrt{5}}$ //

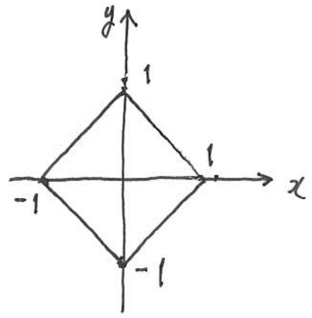
(2) $x\geqq 0,\ y\geqq 0$ のとき $x+y=1$

$x\geqq 0,\ y<0$ のとき．$x-y=1$

$x<0,\ y\geqq 0$ のとき $-x+y=1$

$x<0,\ y<0$ のとき $-x-y=1$

よって右のグラフになる．



(3) 右下図より．$|x|+|y|$ が最小になるのは

$|x|+|y|=k$ が点 $(0,\ 1-\sqrt{3})$ を通るとき

$\therefore$ $\underline{\text{最小値 } \sqrt{3}-1,\ (x,y)=(0,\ 1-\sqrt{3})}$ //

最大となるのは．$y=x+k$ と①が第2象限で接するとき．$\therefore$ (1)より $k=3+2\sqrt{5}$

このとき．$(x,y)=\left(-2-\frac{8\sqrt{5}}{5},\ 1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

$\therefore$ $\underline{\text{最大値 } 3+2\sqrt{5},\ (x,y)=\left(-2-\frac{8\sqrt{5}}{5},\ 1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}$ //