

2018年工学部・情報工学部 第3問

3 平面  $\alpha$  上の  $\triangle OAB$  に対して、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $|\vec{a}| = 1$ 、 $|\vec{b}| = t$ 、 $\angle AOB = \theta$  とする。ただし、 $0 < \theta < \pi$  とする。また、 $\triangle OAB$  の面積を  $S$  とする。次に答えよ。

- (1)  $|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 - 4\sqrt{3}S$  を  $t$ 、 $\cos\theta$ 、 $\sin\theta$  を用いて表せ。
- (2)  $t$  を固定したとき、(1) で求めた式を  $f(\theta)$  とする。 $f(\theta)$  の最小値を  $t$  を用いて表せ。また、その最小値をとるときの  $\theta$  の値を求めよ。

設問 (3)、(4) では、点  $P$  が平面  $\alpha$  上を動くものとし、 $\overrightarrow{OP} = \vec{x}$  とする。

- (3)  $t$  および  $\theta$  を固定したとき、 $|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{BP}|^2$  の最小値を  $t$ 、 $\cos\theta$  を用いて表せ。また、その最小値をとるときの  $\vec{x}$  を  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  を用いて表せ。
- (4)  $t$ 、 $\theta$  および  $\vec{x}$  によらず、 $|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{BP}|^2 \geq \frac{4\sqrt{3}}{3}S$  が成り立つことを示せ。また、この不等式において等号が成立するのはどのような場合か答えよ。