2010年 総合理工（数理・情報システム以外） 第2問

数理 石井K

2 自然数nに対して，ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$を

$$\vec{a}=\left(n^{\frac{1}{4}},\ n^{\frac{1}{4}}+1\right),\quad \vec{b}=\left(n^{\frac{1}{4}},\ 1-n^{\frac{1}{4}}\right)$$

で定めるとき，次の問いに答えよ．

(1) $\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角をθとするとき，$\cos\theta$をnを用いて表せ．

(2) $\dfrac{1}{\cos\theta}$が整数となるようなnを小さい順にn_1，n_2，…とするとき，i番目のn_iをiを用いて表せ．

(3) $n=n_i$に対する$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角をθ_iとおく．自然数kに対して，

$$S_k=\frac{1}{\tan^2\theta_1}+\frac{1}{\tan^2\theta_2}+\cdots+\frac{1}{\tan^2\theta_k}$$

とするとき，$\lim_{k\to\infty}S_k$を求めよ．

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{n^{\frac{1}{2}}+(n^{\frac{1}{4}}+1)^2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{n^{\frac{1}{2}}+(n^{\frac{1}{4}}-1)^2}$

$$|\vec{a}||\vec{b}|=\sqrt{n+\left\{(n^{\frac{1}{4}}+1)^2+(n^{\frac{1}{4}}-1)^2\right\}n^{\frac{1}{2}}+(n^{\frac{1}{4}}+1)^2(n^{\frac{1}{4}}-1)^2}$$

$$=\sqrt{n+(2n^{\frac{1}{2}}+2)n^{\frac{1}{2}}+n-2n^{\frac{1}{2}}+1}$$

$$=\sqrt{4n+1}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(n^{\frac{1}{4}})^2-(n^{\frac{1}{4}}+1)(n^{\frac{1}{4}}-1)=1$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\underline{\frac{1}{\sqrt{4n+1}}}_{\,/\!/}$$

(2) $\dfrac{1}{\cos\theta}=\sqrt{4n+1}$ であるから $\sqrt{4n+1}=m$ (m：整数) とおくと

$$4n+1=m^2\qquad\therefore\ n=\frac{m^2-1}{4}$$

$\therefore\ \dfrac{m^2-1}{4}$ が自然数となる $\Longleftrightarrow$ mは3以上の奇数

$\therefore\ m=2i+1$ となり，そのとき，$n_i=\dfrac{(2i+1)^2-1}{4}$　　$\therefore\ \underline{n_i=i^2+i}_{\,/\!/}$

(3) $\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より，$\dfrac{1}{\tan^2\theta_i}=\dfrac{1}{4n_i}=\dfrac{1}{4i(i+1)}$

$$\therefore\ S_k=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{k}{4(k+1)}$$

$$\therefore\ \lim_{k\to\infty}S_k=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{4\left(1+\frac{1}{k}\right)}=\underline{\frac{1}{4}}_{\,/\!/}$$