2015年 文系 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 座標平面上の2点A$(-1,\ 1)$，B$(1,\ -1)$を考える．また，Pを座標平面上の点とし，そのx座標の絶対値は1以下であるとする．次の条件（i）または（ii）をみたす点Pの範囲を図示し，その面積を求めよ．

（i）頂点のx座標の絶対値が1以上の2次関数のグラフで，点A，P，Bをすべて通るものがある．

（ii）点A，P，Bは同一直線上にある． 直線AB: $y=-x$ ，$P(x,y)$とおくと．

(ii) $\Leftrightarrow$ $P(x,y)$ は $y=-x$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ 上の点である．

(i)．$y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ とおくと．

Aを通るので，$1=a-b+c$ Bを通るので $-1=a+b+c$

よって，$a+c=0$，$b=-1$ $\therefore y=ax^2-x-a$ と表せる．

これが $P(x,y)$ を通ることと頂点のx座標の絶対値が1以上であることより． $\left|\dfrac{1}{2a}\right|\geqq 1$ かつ $y=ax^2-x-a$

(i) $-1<x<1$ のとき． $y+x=a(x^2-1)$ $\therefore a=\dfrac{x+y}{x^2-1}$

$\therefore \left|\dfrac{x^2-1}{2(x+y)}\right|\geqq 1$

• $x+y\geqq 0$ のとき． $1-x^2\geqq 2x+2y$

$\therefore 2y\leqq -x^2-2x+1$

$\therefore 2y\leqq -(x+1)^2+2$

$\therefore y\leqq -\frac{1}{2}(x+1)^2+1$

• $x+y<0$ のとき． $1-x^2\geqq -2(x+y)$

$\therefore 2y\geqq x^2-2x-1$

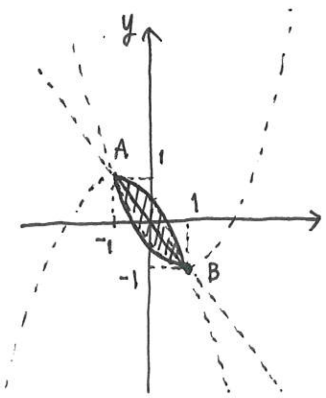
$2y\geqq (x-1)^2-2$

$\therefore y\geqq \frac{1}{2}(x-1)^2-1$

(ii) $x=-1$ のとき $P=A$ となる

(iii) $x=1$ のとき $P=B$ となる．

以上より下のグラフとなる（境界線を含む）



$$\therefore S=\int_{-1}^{1}-\frac{1}{2}(x+1)^2+1-\frac{1}{2}(x-1)^2+1\,dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{4}{3}$$