# 高崎経済大学

2012年 経済・地域政策 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 2つの放物線 $C_1 : y = x^2$, $C_2 : y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}$ がある．$C_1$ と $C_2$ の2つの交点を通る直線を $\ell_1$ とする．以下の各問に答えよ．

(1) $\ell_1$ の式を求めよ．

(2) $C_1$ と $C_2$ で囲まれた図形の面積を $S_1$ とし，$C_1$ と $\ell_1$ で囲まれた図形の面積を $S_2$ とする．この2つの面積の比 $S_1 : S_2$ を求めよ．

(3) $\ell_1$ と平行な直線 $\ell_2$ がある．$C_1$ と $\ell_2$ で囲まれた図形の面積 $S_3$ が $\frac{9}{2}$ であるとき，$\ell_2$ の式を求めよ．

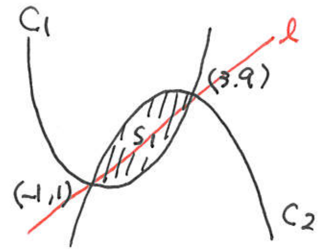
(1) まず交点を求める．

$$x^2 - \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}\right) = 0 \iff \frac{3}{2}x^2 - 3x - \frac{9}{2} = 0$$
$$\iff 3x^2 - 6x - 9 = 0$$
$$\iff x^2 - 2x - 3 = 0$$

$\therefore (x-3)(x+1) = 0$ より $x = -1, 3$ $\therefore$ 交点は $(-1, 1), (3, 9)$

これらの交点を通る直線は $y = \frac{9-1}{3-(-1)}(x+1)+1$ $\therefore \ell_1 : y = 2x+3$ //

(2) $S_1 = \int_{-1}^{3} -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2} - x^2 \, dx$




$= -\frac{3}{2}\int_{-1}^{3} (x+1)(x-3)\, dx$

$= -\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (3-(-1))^3$

$= 16$

$S_2 = \int_{-1}^{3} 2x + 3 - x^2 \, dx$

$= -\int_{-1}^{3} (x-3)(x+1)\, dx$

$= - \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)(3-(-1))^3$

$= \frac{32}{3}$

$\therefore S_1 : S_2 = 16 : \frac{32}{3} = 3 : 2$ //

(3) $\ell_2 : y = 2x + k$ とおく

$S_3 = \int_{\alpha}^{\beta} 2x + k - x^2 \, dx$ （$\alpha, \beta$ は $x^2 - 2x - k = 0$ の解 とおいた．）

$= -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\, dx$

$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$

ここで $\begin{cases} \alpha = \frac{2-\sqrt{4+4k}}{2} = 1 - \sqrt{k+1} \\ \beta = \frac{2+\sqrt{4+4k}}{2} = 1 + \sqrt{k+1} \end{cases}$ より

$\beta - \alpha = 2\sqrt{k+1}$ $\therefore \frac{4}{3}(k+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2} \iff k = \frac{5}{4}$

$\therefore \ell_2 : y = 2x + \frac{5}{4}$ //