2016年 文系 第1問

数理 石井K

1 関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 方程式 $f(x) = 0$ の実数解をすべて求めなさい．

(2) $f(x)$ の増減，極値を調べ，$y = f(x)$ のグラフをかきなさい．

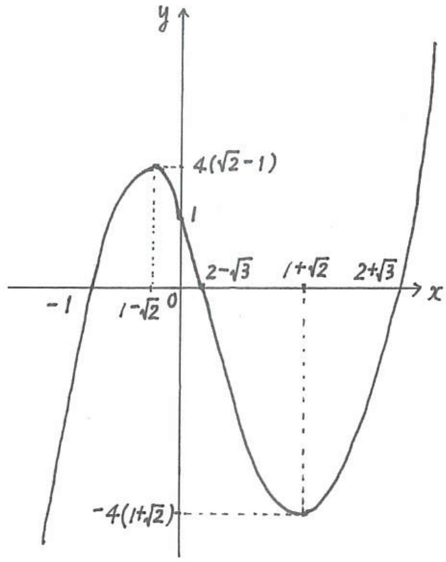
(3) 関数 $y = |f(x)|$ の $-1 \leqq x \leqq 4$ における最大値を求めなさい．

(1) $f(x) = x^3 + 1 - 3x(x+1)$

$= (x+1)(x^2 - x + 1) - 3x(x+1)$

$= (x+1)(x^2 - 4x + 1)$

∴ $f(x) = 0$ の実数解は，$x = -1,\ 2 \pm \sqrt{3}$ //



(2) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 3$

$= 3(x^2 - 2x - 1)$

∴ $f'(x) = 0$ となるのは，$x = 1 \pm \sqrt{2}$ のとき

x	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$\alpha = 1 - \sqrt{2}$，$\beta = 1 + \sqrt{2}$ とおくと，α, β は $f'(x) = 0$ の

実数解より，$\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$，$\beta^2 - 2\beta - 1 = 0$

$f(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha^2 - 3\alpha + 1$

$= (\alpha - 1)\underbrace{(\alpha^2 - 2\alpha - 1)}_{=0} - 4\alpha$

$= -4 \cdot (1 - \sqrt{2})$

$= 4(\sqrt{2} - 1)$

$$
\begin{array}{r}
\alpha - 1 \\
\alpha^2 - 2\alpha - 1 \,\big)\, \overline{\alpha^3 - 3\alpha^2 - 3\alpha + 1} \\
\underline{\alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha \qquad} \\
-\alpha^2 - 2\alpha + 1 \\
\underline{-\alpha^2 + 2\alpha + 1} \\
-4\alpha
\end{array}
$$

同様にして，$f(\beta) = -4(1 + \sqrt{2})$

以上より，グラフは右上のようになる．

∴ 極大値 $4(\sqrt{2} - 1)$ ($x = 1 - \sqrt{2}$ のとき)

極小値 $-4(\sqrt{2} + 1)$ ($x = 1 + \sqrt{2}$ のとき) //

(3) $y = |f(x)|$ のグラフは (2) のグラフの $y < 0$ の部分を

x 軸に関して対称に折り返したものなので

$f(4) = 5$ に注意すると，

最大値 $4(1 + \sqrt{2})$ ($x = 1 + \sqrt{2}$ のとき) //