山梨大学

2015年 工学部・生命環境（生命工）第2問

$\boxed{2}$ 座標平面上において，曲線 $C : y = e^{2x}$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ e^{2a})$ における接線 ℓ は原点Oを通るとする．

(1) a の値を求めよ．

(2) 不定積分 $\int \log t\,dt$ および $\int (\log t)^2\,dt$ を求めよ．

(3) 曲線 C と直線 ℓ および y 軸で囲まれた図形を y 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(1) $y' = 2e^{2x}$

$\therefore \ell : y = 2e^{2a}(x-a) + e^{2a}$

$\therefore \ell : y = 2e^{2a}x + (1-2a)e^{2a}$

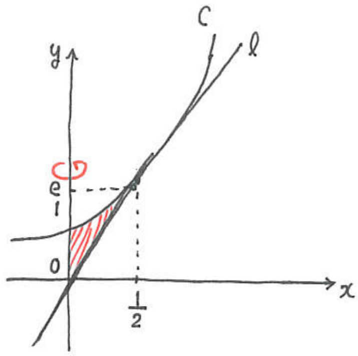
これが原点を通るので，$(1-2a)e^{2a} = 0$

$e^{2a} > 0$ より，$\underline{a = \frac{1}{2}}$ //

(2) $\int \log t\ dt = \underline{t\log t - t + C\ (C\text{は積分定数})}$ //

$\int (\log t)^2 dt = t(\log t)^2 - \int 2\log t\ dt$

$= \underline{t(\log t)^2 - 2t\log t + 2t + C\ (C\text{は積分定数})}$ //



(3) $V = (\text{底面の半径}\ \frac{1}{2},\ \text{高さ}\ e\ \text{の円すい})$

$- \int_1^e \pi x^2\,dy$

$= \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot e \cdot \frac{1}{3} - \pi \int_1^e \left(\frac{1}{2}\log y\right)^2 dy$

$= \frac{\pi e}{12} - \pi \cdot \frac{1}{4} \int_1^e (\log y)^2 dy$

$y = e^{2x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\log y$

$= \frac{\pi e}{12} - \frac{\pi}{4}\left[y(\log y)^2 - 2y\log y + 2y\right]_1^e$ ((2)を使った)

$= \frac{\pi e}{12} - \frac{\pi}{4}(e - 2e + 2e - 2)$

$= \underline{\frac{\pi(3-e)}{6}}$ //