

2011年第4問

1枚目/2枚

数理  
石井K

4 2次関数  $f(x) = \frac{12}{5}x^2 - \frac{32}{5}x + 4$  と、1次関数  $g(x) = 2x - 2$  が与えられている。この2つの関数  $f(x)$  と  $g(x)$  を用いて、 $a \geq 1$  の範囲で  $S(a)$  を、以下のように定める。

$$S(a) = \int_a^{a+1} |f(x) - g(x)| dx$$

このとき  $S(a)$  を求めなさい。

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{12}{5}x^2 - \frac{42}{5}x + 6 \\ &= \frac{12}{5}(x-1)(x-\frac{5}{2}) \end{aligned}$$

$\therefore x \leq 1, \frac{5}{2} \leq x$  のとき、 $f(x) - g(x) \geq 0$  で、 $1 \leq x \leq \frac{5}{2}$  のとき、 $f(x) - g(x) \leq 0$

よって、以下のように場合を分ける。

(i)  $a \geq \frac{5}{2}$  のとき。

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^{a+1} \left( \frac{12}{5}x^2 - \frac{42}{5}x + 6 \right) dx \\ &= \left[ \frac{4}{5}x^3 - \frac{21}{5}x^2 + 6x \right]_a^{a+1} \\ &= \frac{4}{5}(a+1)^3 - \frac{21}{5}(a+1)^2 + 6(a+1) - \frac{4}{5}a^3 + \frac{21}{5}a^2 - 6a \\ &= \frac{12}{5}a^2 - 6a + \frac{13}{5} \end{aligned}$$

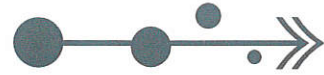
(ii)  $\frac{3}{2} \leq a < \frac{5}{2}$  のとき。

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^{\frac{5}{2}} \left( -\frac{12}{5}x^2 + \frac{42}{5}x - 6 \right) dx + \int_{\frac{5}{2}}^{a+1} \left( \frac{12}{5}x^2 - \frac{42}{5}x + 6 \right) dx \\ &= \left[ -\frac{4}{5}x^3 + \frac{21}{5}x^2 - 6x \right]_a^{\frac{5}{2}} + \left[ \frac{4}{5}x^3 - \frac{21}{5}x^2 + 6x \right]_{\frac{5}{2}}^{a+1} \\ &= -\frac{25}{2} + \frac{105}{4} - 15 + \frac{4}{5}a^3 - \frac{21}{5}a^2 + 6a + \frac{4}{5}(a+1)^3 - \frac{21}{5}(a+1)^2 + 6(a+1) - \frac{25}{2} + \frac{105}{4} - 15 \\ &= \frac{8}{5}a^3 - 6a^2 + 6a + \frac{1}{10} \end{aligned}$$

(iii)  $1 \leq a < \frac{3}{2}$  のとき。

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^{a+1} \left( -\frac{12}{5}x^2 + \frac{42}{5}x - 6 \right) dx \\ &= -\frac{12}{5}a^2 + 6a - \frac{13}{5} \end{aligned}$$

) (i) の計算を利用する。



2011年 第4問

2枚目 / 2枚

4 2次関数  $f(x) = \frac{12}{5}x^2 - \frac{32}{5}x + 4$  と, 1次関数  $g(x) = 2x - 2$  が与えられている. この2つの関数  $f(x)$  と  $g(x)$  を用いて,  $a \geq 1$  の範囲で  $S(a)$  を, 以下のように定める.

$$S(a) = \int_a^{a+1} |f(x) - g(x)| dx$$

このとき  $S(a)$  を求めなさい.

(i) ~ (iii) より.

$$S(a) = \begin{cases} \frac{12}{5}a^2 - 6a + \frac{13}{5} & (a \geq \frac{5}{2} \text{ のとき}) \\ \frac{8}{5}a^3 - 6a^2 + 6a + \frac{1}{10} & (\frac{3}{2} \leq a < \frac{5}{2} \text{ のとき}) \\ -\frac{12}{5}a^2 + 6a - \frac{13}{5} & (1 \leq a < \frac{3}{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$