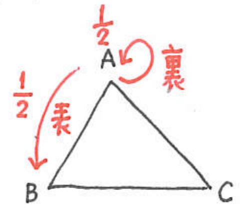
広島大学

2011年 第5問　　1枚目／2枚　　数理 石井K

5 △ABCの頂点は反時計回りにA，B，Cの順に並んでいるとする．点Aを出発した石が，次の規則で動くとする．

コインを投げて表が出たとき反時計回りに隣の頂点に移り，裏が出たときは動かない．コインを投げて表と裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とする．
コインを n 回投げたとき，石が点A，B，Cにある確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とする．次の問いに答えよ．

(1) a_1，b_1，c_1 の値を求めよ．
(2) a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n で表せ．また，a_2，b_2，c_2 および a_3，b_3，c_3 の値を求めよ．
(3) a_n，b_n，c_n のうち2つの値が一致することを証明せよ．
(4) (3)において一致する値を p_n とする．p_n を n で表せ．



(1) $a_1 = b_1 = \frac{1}{2}$, $c_1 = 0$ //

(2) $n+1$回目にAにあるのは，n回目にAにあり$n+1$回目にうらが出る場合と，
n回目にCにあり，$n+1$回目に表が出る場合なので

$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + c_n)$ //　同様に考えて，$b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$，$c_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n)$ //

よって，$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + c_1) = \frac{1}{4}$，$b_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1) = \frac{1}{2}$，$c_2 = \frac{1}{2}(b_1 + c_1) = \frac{1}{4}$

まとめると，$a_2 = c_2 = \frac{1}{4}$，$b_2 = \frac{1}{2}$ //

同様にして，$a_3 = \frac{1}{4}$，$b_3 = c_3 = \frac{3}{8}$ //

(3) $n \geqq 1$ において「$a_n = b_n$ または $b_n = c_n$ または $c_n = a_n$」…(*) を示す

(i) $n=1$ のとき，(1)より成り立つ

(ii) $n=k$ のとき，成り立つと仮定すると，$a_k = b_k$ または $b_k = c_k$ または $c_k = a_k$

このとき，$a_{k+1} - b_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + c_k) - \frac{1}{2}(a_k + b_k) = \frac{1}{2}(c_k - b_k)$ …①

$b_{k+1} - c_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + b_k) - \frac{1}{2}(b_k + c_k) = \frac{1}{2}(a_k - c_k)$ …②

$c_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k + c_k) - \frac{1}{2}(a_k + c_k) = \frac{1}{2}(b_k - a_k)$ …③

仮定より，①，②，③ のうち 1つは 0 になる．

すなわち，$a_{k+1} = b_{k+1}$ または $b_{k+1} = c_{k+1}$ または $c_{k+1} = a_{k+1}$ となり，$n = k+1$ のときも成り立つ

(i)，(ii)より，(*)は成立する ▨

2枚目へつづく

2011年 第5問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{5}$ △ABCの頂点は反時計回りにA，B，Cの順に並んでいるとする．点Aを出発した石が，次の規則で動くとする．

コインを投げて表が出たとき反時計回りに隣の頂点に移り，裏が出たときは動かない．コインを投げて表と裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とする．

コインを n 回投げたとき，石が点A，B，Cにある確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とする．次の問いに答えよ．

(1) a_1，b_1，c_1 の値を求めよ．

(2) a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n で表せ．また，a_2，b_2，c_2 および a_3，b_3，c_3 の値を求めよ．

(3) a_n，b_n，c_n のうち2つの値が一致することを証明せよ．

(4) (3)において一致する値を p_n とする．p_n を n で表せ．

(4) (3)より．a_n, b_n, c_n のうち一致するものを p_n とすると．残りは $1-2p_n$ と表せる

確率の和が1であることより．

いま．$a_n = b_n = p_n$，$c_n = 1-2p_n$ の場合を考えると，(3)の③の値が0になる．

すなわち．$a_{n+1} = c_{n+1} = p_{n+1}$ となる．

よって．(2)の漸化式 $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + c_n)$ に代入して．

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}\{p_n + (1-2p_n)\}$$

$$\therefore p_{n+1} = -\frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}$$

他の場合についても，この関係が導かれる．

$$\therefore p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$$

∴数列 $\left\{p_n - \frac{1}{3}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列

$$\therefore p_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore p_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore p_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$