



2015年文系第5問

5 n を自然数とする. A, B, C, D, E の5人が1個のボールをパスし続ける. 最初に A がボールを持っていて, A は自分以外の誰かに同じ確率でボールをパスし, ボールを受けた人は, また自分以外の誰かに同じ確率でボールをパスし, 以後同様にパスを続ける. n 回パスしたとき, B がボールを持っている確率を p_n とする. ここで, たとえば, $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow E$ の順にボールをパスすれば, 4回パスしたと考える. 次の問いに答えよ.

(1) p_1, p_2, p_3, p_4 を求めよ.

(2) p_n を求めよ.

$$(1) \underline{p_1 = \frac{1}{4}} \quad "$$

$$A \rightarrow B \text{以外} \rightarrow B \quad \therefore \underline{p_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}} \quad "$$

$$\underline{p_3 = (1 - p_2) \times \frac{1}{4} = \frac{13}{64}} \quad " \quad \underline{p_4 = (1 - p_3) \times \frac{1}{4} = \frac{51}{256}} \quad "$$

$$(2) p_{n+1} = (1 - p_n) \times \frac{1}{4}$$

$$\therefore p_{n+1} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{4} \left(p_n - \frac{1}{5} \right)$$

\therefore 数列 $\{p_n - \frac{1}{5}\}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$, 公比 $-\frac{1}{4}$ の等比数列

$$\therefore p_n - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \underline{p_n = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^n} \quad "$$