

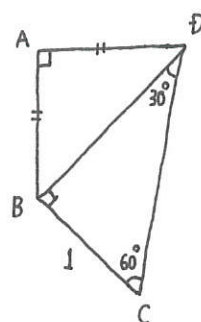
2016年文系第2問

2 四角形 ABCD において,

$$\angle DAB = \angle DBC = 90^\circ, \quad \angle BCD = 60^\circ, \quad AB = AD, \quad BC = 1$$

とする。次の問いに答えよ。

- (1) 対角線 BD の長さの 2 乗 BD^2 を求めよ。
 (2) 対角線 AC の長さの 2 乗 AC^2 を求めよ。
 (3) $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACD = \beta$ とおくとき, $\cos^2 \alpha$, $\cos^2 \beta$ を求めよ。



(1) 右図より, $BD = \sqrt{3}$

$$\therefore BD^2 = 3$$

(2) $AB = AD = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

余弦定理より, ($\triangle ABC$ において)

$$AC^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + 1^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot 1 \cdot \cos 135^\circ$$

$$= \frac{3}{2} + 1 + \sqrt{3}$$

$$= \frac{5}{2} + \sqrt{3}$$

(3) $\cos \alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \quad \therefore \cos^2 \alpha = \frac{(AB^2 + AC^2 - BC^2)^2}{4AB^2 AC^2}$

$$\therefore \cos^2 \alpha = \frac{\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \sqrt{3} - 1\right)^2}{4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{5}{2} + \sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} + 4}{2\sqrt{3} + 5}$$

$$= \frac{8 + 2\sqrt{3}}{13}$$

同様に, $CD = 2$ より.

$$\cos^2 \beta = \frac{(AC^2 + CD^2 - AD^2)^2}{(2 \cdot AC \cdot CD)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{5}{2} + \sqrt{3} + 4 - \frac{3}{2}\right)^2}{4 \cdot \left(\frac{5}{2} + \sqrt{3}\right) \cdot 4}$$

$$= \frac{14 + 5\sqrt{3}}{20 + 8\sqrt{3}}$$

$$= \frac{40 - 3\sqrt{3}}{52}$$