



2018年理系第5問

5 座標平面上で、曲線 $C: y = x^3 - 3x$ と、 $b > a^3 - 3a$ を満たすように動く点 $P(a, b)$ を考える。また、点 P に対し、二つの不等式

$$|x - a| \leq 1, \quad |y - b| \leq 1$$

によって表される座標平面上の領域を B とする。領域 B と曲線 C に対して、 B と C が共有点 Q をもち、さらに B と C の共有点が B の境界線上にしかないとき、 B と C は点 Q で接するというようにする。次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C の概形をかき、さらに点 P の座標が $(-2, 3)$ のときの領域 B を図示せよ。
- (2) B と C が $x < -1$ の範囲にある点で接するように、点 P は動くとする。このときの点 P の軌跡を求めよ。
- (3) B と C がある点で接するように点 P は動くとする。このときの点 P の軌跡を求めよ。
- (4) (3) の点 P の軌跡は、ある関数 $y = f(x)$ のグラフで表すことができる。この $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ。