0001826543718999

福島大学

2014年 第2問

$\boxed{2}$ $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ の値をそれぞれ求めなさい．

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

(3) $f'(x)$ を $f(x)$ を用いた式で表しなさい．

(4) $G(a)=\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{1-\{f(x)\}^2}{2}\,dx$ とするとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}G(a)$ の値を求めなさい．

数理 石井K

(1) $$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}=\underline{1}\ //$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}=\underline{-1}\ //$$

(2) $$f'(x)=\frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$=\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2-(e^{2x}+e^{-2x}-2)}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$=\underline{\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}}\ //$$

(3) $$f'(x)+\{f(x)\}^2=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}+\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{(e^x+e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=1$$

$$\therefore\ \underline{f'(x)=1-\{f(x)\}^2}\ //$$

(4) $$G(a)=\int_{-a}^{a}\frac{1-\{f(x)\}^2}{2}\,dx=\int_{-a}^{a}\frac{f'(x)}{2}\,dx$$

(3)より

$$\therefore\ G(a)=\left[\tfrac{1}{2}f(x)\right]_{-a}^{a}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^a-e^{-a}}{e^a+e^{-a}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-a}-e^{a}}{e^{-a}+e^{a}}$$

$$=\frac{e^a-e^{-a}}{e^a+e^{-a}}$$

$$\therefore\ \lim_{a\to\infty}G(a)=\lim_{x\to\infty}f(x)$$

$$=\underline{1}\ //$$