0001976633208999

広島大学

2015年 文系 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ α, β は $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$ を満たす実数とする．三つの放物線

$$C_1 : y = x(1-x), \quad C_2 : y = x(1-\beta-x), \quad C_3 : y = (x-\alpha)(1-x)$$

を考える．C_2 と C_3 の交点の x 座標を γ とする．また，C_1, C_2, C_3 で囲まれた図形の面積を S とする．次の問いに答えよ．

(1) γ を α, β を用いて表せ．

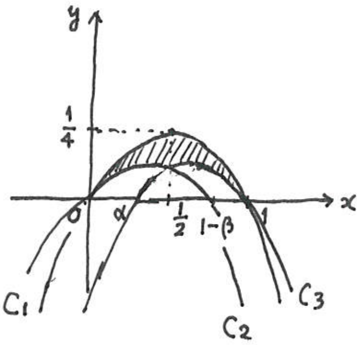
(2) S を α, β を用いて表せ．

(3) α, β が $\alpha + \beta = \dfrac{1}{4}$ を満たしながら動くとき，S の最大値を求めよ．

(1) $x(1-\beta-x) - (x-\alpha)(1-x) = 0$ を解くと，$x = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ $\quad \therefore \underline{\gamma = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}}$ //

(2) $S = \displaystyle\int_0^{\gamma} x(1-x) - x(1-\beta-x)\,dx$

$\displaystyle\quad + \int_{\gamma}^{1} x(1-x) - (x-\alpha)(1-x)\,dx$



$\displaystyle = \int_0^{\gamma} \beta x\,dx + \int_{\gamma}^{1} \alpha(1-x)\,dx$

$\displaystyle = \left[\frac{1}{2}\beta x^2\right]_0^{\gamma} + \left[\alpha x - \frac{1}{2}\alpha x^2\right]_{\gamma}^{1}$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\beta\gamma^2 + \alpha - \frac{1}{2}\alpha - \alpha\gamma + \frac{1}{2}\alpha\gamma^2$

$\displaystyle = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\gamma^2 + \frac{1}{2}\alpha - \alpha\gamma$

$\displaystyle = \underline{\frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)}}$ //

〈別解〉(3)
相加・相乗の関係を用いて(3)を解いてもよい

(3) (2)より $\beta = \dfrac{1}{4} - \alpha$ を代入して．

$$S = \frac{\alpha\left(\frac{1}{4}-\alpha\right)}{2\cdot\frac{1}{4}} = -2\left(\alpha - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{32}$$

$\therefore$ $\underline{S \text{ の最大値は } \dfrac{1}{32} \left(\alpha = \beta = \dfrac{1}{8} \text{ のとき}\right)}$ //