0002190189087999

広島大学

2016年 文系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ aを正の定数とし，座標平面上において，

円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$,　放物線 $C_2 : y = ax^2 + 1$

を考える．C_1 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ における C_1 の接線 ℓ は点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ で C_2 に接している．次の問いに答えよ．

(1) s, t および a を求めよ．

(2) C_2, ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) 円 C_1 上の点が点Pから点 $\mathrm{R}(0,\ 1)$ まで反時計回りに動いてできる円弧を C_3 とする．C_2, ℓ および C_3 で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) $\ell : \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y = 1$ … (*)

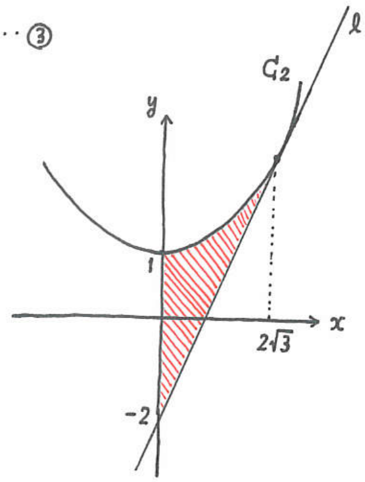
これが点Qを通ることより，$\sqrt{3}s - t = 2$ … ①

また，点Qは C_2 上の点より，$t = as^2 + 1$ … ②

C_2 において，$y' = 2ax$ より ℓ の傾きを考えると (*) より，$2as = \sqrt{3}$ … ③

②に③を代入して，$t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot s + 1$ … ④

①,④より，$\underline{s = 2\sqrt{3},\ t = 4}$ // ③に s を代入して，$\underline{a = \dfrac{1}{4}}$ //



(2) 右の図より

$$S = \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{4}x^2 + 1 - (\sqrt{3}x - 2)\,dx$$

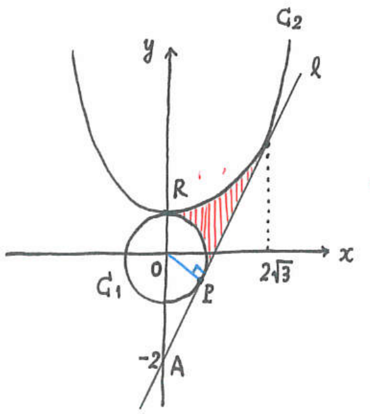
$$= \left[\frac{x^3}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 3x\right]_0^{2\sqrt{3}}$$

$$= 2\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$$

$$= \underline{2\sqrt{3}}\ //$$

(3) 求める面積を $\underset{\mathrm{A}(0,-2)}{\mathrm{T}}$ とおくと，T = S − 扇形OPR − 直角三角形OAP

中心角 120°　OA = 2, OP = 1, AP = $\sqrt{3}$



よって，$T = 2\sqrt{3} - \pi\cdot 1^2\cdot\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}$

$$= \underline{\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}}\ //$$