



2018年理系第5問

5 座標平面上で、曲線  $C: y = x^3 - 3x$  と、 $b > a^3 - 3a$  を満たすように動く点  $P(a, b)$  を考える。また、点  $P$  に対し、二つの不等式

$$|x - a| \leq 1, \quad |y - b| \leq 1$$

によって表される座標平面上の領域を  $B$  とする。領域  $B$  と曲線  $C$  に対して、 $B$  と  $C$  が共有点  $Q$  をもち、さらに  $B$  と  $C$  の共有点が  $B$  の境界線上にしかないとき、 $B$  と  $C$  は点  $Q$  で接するというようにする。次の問いに答えよ。

- (1) 曲線  $C$  の概形をかき、さらに点  $P$  の座標が  $(-2, 3)$  のときの領域  $B$  を図示せよ。
- (2)  $B$  と  $C$  が  $x < -1$  の範囲にある点で接するように、点  $P$  は動くとする。このときの点  $P$  の軌跡を求めよ。
- (3)  $B$  と  $C$  がある点で接するように点  $P$  は動くとする。このときの点  $P$  の軌跡を求めよ。
- (4) (3) の点  $P$  の軌跡は、ある関数  $y = f(x)$  のグラフで表すことができる。この  $f(x)$  は  $x = 0$  で微分可能であることを示せ。