広島大学

2018年 理系 第4問

$\boxed{4}$ 0，1，2，3の数字が一つずつ書かれた4枚のカードがある．この中から1枚を取り出し，書かれた数字を見て元に戻す．この操作を N 回繰り返し，カードに書かれた数字を順に Z_1，Z_2，$\cdots$，Z_N とする．ここで，N は3以上の自然数である．さらに，複素数

$$\alpha = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$$

を用いて，項数 N の数列 $\{X_n\}$ を

$$X_1 = \alpha^{Z_1}, \quad X_{n+1} = X_n\alpha^{Z_{n+1}} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots,\ N-1)$$

により定める．$n = 1$，2，$\cdots$，N に対し，$X_n = \alpha$ となる確率を P_n とし，$X_n = \alpha^2$ となる確率を Q_n とする．次の問いに答えよ．

(1) P_1 を求めよ．

(2) $n = 1$，2，$\cdots$，$N-1$ とする．$\alpha^{Z_{n+1}} = 1$ となる確率を求めよ．

(3) $n = 1$，2，$\cdots$，N とする．$X_n = 1$ となる確率を，P_n と Q_n を用いて表せ．

(4) $n = 1$，2，$\cdots$，$N-1$ に対し，P_n を用いて P_{n+1} を表せ．

(5) $n = 1$，2，$\cdots$，N に対し，P_n を求めよ．