0001806723918999

近畿大学

2014年 理系 第3問

$\boxed{3}$ a, bを正の定数とし，関数

$$f(x)=\frac{1}{e^{\frac{x-a}{b}}+2}\quad (x>0)$$

を考える．

(1) $x>a$のとき，$\lim_{b\to+0}f(x)=\boxed{ア}$ 0 であり，$x<a$のとき，$\lim_{b\to+0}f(x)=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ 1 2 である．

(2) 曲線$y=f(x)$の点$(a,\ f(a))$における接線の方程式は，$y=\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}\,b}x+\dfrac{a+\boxed{キ}\,b}{\boxed{ク}\,b}$ である． −1 9 3 9

(3) $b=\dfrac{1}{3}$とする．$t=e^{3(x-a)}$とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\boxed{ケ}\,t}$ 3 であり，正の定数cに対して，

$$\int_a^{a+c}f(x)\,dx=\frac{1}{\boxed{コ}}\log\left(\frac{\boxed{サ}\,e^{3c}}{e^{3c}+\boxed{シ}}\right)$$

3 6 2

となる．また，正の定数p, qが，$\displaystyle\int_{a-q}^{a+p}f(x)\,dx=\frac{4}{3}p$を満たすとき，

$$q=\frac{1}{\boxed{ス}}\log\left(\frac{e^{\boxed{セ}\,p}+\boxed{ソ}\,e^{\boxed{タ}\,p}-1}{\boxed{チ}}\right)$$

8 2 5 3 2

となる．

(1) $x>a$のとき $\lim_{b\to+0}\dfrac{x-a}{b}=+\infty$ より，$\lim_{b\to+0}f(x)=0$ //

$x<a$のとき $\lim_{b\to+0}\dfrac{x-a}{b}=-\infty$ より，$\lim_{b\to+0}f(x)=\dfrac{1}{2}$ //

(2) $f'(x)=\dfrac{-\frac{1}{b}\cdot e^{\frac{x-a}{b}}}{\left(e^{\frac{x-a}{b}}+2\right)^2}$

$\therefore$ 接線は $y=\dfrac{-1}{9b}(x-a)+\dfrac{1}{3}$

$\therefore y=\dfrac{-1}{9b}x+\dfrac{a+3b}{9b}$ //

(3) $x=\frac{1}{3}\log t+a$ より $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{3t}$ //

$$\int_a^{a+c}f(x)\,dx=\int_1^{e^{3c}}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t(t+2)}\,dt=\frac{1}{6}\int_1^{e^{3c}}\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}\,dt=\frac{1}{6}\log\frac{3e^{3c}}{e^{3c}+2}$$ //

$$\int_{a-q}^{a+p}f(x)\,dx=\int_{e^{-3q}}^{e^{3p}}\frac{1}{t+2}\cdot\frac{1}{3t}\cdot dt=\frac{1}{6}\int_{e^{-3q}}^{e^{3p}}\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}\,dt$$

$$=\frac{1}{6}\log\frac{e^{3p}(e^{-3q}+2)}{e^{-3q}(e^{3p}+2)}$$

$\therefore \dfrac{e^{3p}(e^{-3q}+2)}{e^{-3q}(e^{3p}+2)}=e^{8p}$ $\therefore q=\dfrac{1}{3}\log\dfrac{e^{8p}+2e^{5p}-1}{2}$ //