2015年 理系 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ m を 2015 以下の正の整数とする．${}_{2015}C_m$ が偶数となる最小の m を求めよ．

$$ {}_{2015}C_m = \frac{2015\cdot 2014\cdots(2016-m)}{m!} = \frac{2015\cdot 2014\cdots(2016-(m-1))}{(m-1)!} \times \frac{2016-m}{m} $$

$\therefore\ {}_{2015}C_m = {}_{2015}C_{m-1} \times \dfrac{2016-m}{m}\quad (m \geqq 2)$ と表せる．

よって，${}_{2015}C_{m-1}$ が奇数 かつ ${}_{2015}C_m$ が偶数 $\iff$ $\dfrac{2016-m}{m}$ を既約分数で表したとき分子が偶数

$\iff$ m が奇数のときは，成り立たないので，
m：偶数 であり，$\dfrac{2016-m}{m}$ を既約分数にしたとき，分子が偶数

$f(n) = \dfrac{2016-n}{n}$ とおくと，

$f(2) = \dfrac{2014}{2} = 1007$, $f(4) = \dfrac{2012}{4} = 503$, $f(6) = \dfrac{2010}{6} = \dfrac{1005}{3} = 335$

$f(8) = \dfrac{2008}{8} = \dfrac{502}{2} = 251$, $f(10) = \dfrac{2006}{10} = \dfrac{1003}{5}$, $f(12) = \dfrac{2004}{12} = 167$

$f(14) = \dfrac{2002}{14} = \dfrac{1001}{7}$, $f(16) = \dfrac{2000}{16} = 125$, $f(18) = \dfrac{1998}{18} = 111$

$f(20) = \dfrac{1996}{20} = \dfrac{499}{5}$, $f(22) = \dfrac{1994}{22} = \dfrac{997}{11}$, $f(24) = \dfrac{1992}{24} = 83$

$f(26) = \dfrac{1990}{26} = \dfrac{995}{13}$, $f(28) = \dfrac{1988}{28} = 71$, $f(30) = \dfrac{1986}{30} = \dfrac{331}{5}$

$f(32) = \dfrac{1984}{32} = 62 \leftarrow$

$\therefore\ m = 32$ //