

2016年 第2問

2 等比数列 $\{a_n\}$ と等差数列 $\{b_n\}$ を次の通りとする.

$$a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-3}, \quad b_n = \frac{3\pi(n-1)}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

これらを用いて, 座標平面上の点 P_n を

$$P_n(a_n \cos b_n, a_n \sin b_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 点 P_4 が線分 P_1P_2 の中点であることを示せ.
- (2) 線分 P_nP_{n+1} の長さ l_n を n の式で表せ.
- (3) 極限值 $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n l_k$ を求めよ.
- (4) 座標平面上の曲線 C が媒介変数 t と定数 α, β を用いて,

$$x = 2^{\alpha t + \beta} \cos t, \quad y = 2^{\alpha t + \beta} \sin t$$

と表されるとする. 曲線 C が $t = 0$ で点 P_1 を通り, $t = \frac{3\pi}{4}$ で点 P_2 を通るとき, α, β の値を求めよ.

- (5) (4) で求めた α, β の値に対し, 曲線 C がすべての点 P_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を通ることを示せ.