福岡女子大学

2016 年 国際文理（国際教養） 第 5 問

5 以下の問に答えなさい．

(1) $p>0$，$q>0$ とする．すべての実数 x に対し，不等式

$$\frac{x^2}{p}+\frac{1}{q}-\frac{(x+1)^2}{p+q}\geqq 0$$

が成り立つことを示しなさい．

(2) 自然数 n に対する命題「$p_1>0$，$p_2>0$，$\cdots$，$p_n>0$ ならば，不等式

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}\geqq\frac{n^2}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$$

が成り立つ」がすべての自然数 n に対して真であることを，(1) の不等式を参考に，数学的帰納法を用いて証明しなさい．

(1) $(\text{左辺}) = \dfrac{q(p+q)x^2+p(p+q)-pq(x+1)^2}{pq(p+q)}$

$= \dfrac{q^2x^2-2pqx+p^2}{pq(p+q)}$

$= \dfrac{(qx-p)^2}{pq(p+q)}$

$\geqq 0$ （$\because p>0,\ q>0,\ p+q>0,\ (qx-p)^2\geqq 0$ より） ▨

(2) 数学的帰納法で示す

(i) $n=1$ のとき

$\dfrac{1}{p_1}\geqq\dfrac{1^2}{p_1}$ であるから成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると，

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_k}\geqq\frac{k^2}{p_1+p_2+\cdots+p_k}$$

両辺に $\dfrac{1}{p_{k+1}}$ をくわえて，

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_{k+1}}\geqq\frac{k^2}{p_1+p_2+\cdots+p_k}+\frac{1}{p_{k+1}}\quad\cdots①$$

ここで (1) の不等式に $p=p_1+p_2+\cdots+p_k\ (>0)$，$q=p_{k+1}$，$x=k$ を代入すると．

$$\frac{k^2}{p_1+p_2+\cdots+p_k}+\frac{1}{p_{k+1}}\geqq\frac{(k+1)^2}{p_1+p_2+\cdots+p_k+p_{k+1}}\quad\cdots②$$

①，②より． $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\cdots+\dfrac{1}{p_k}+\dfrac{1}{p_{k+1}}\geqq\dfrac{(k+1)^2}{p_1+p_2+\cdots+p_k+p_{k+1}}$ $\therefore$ $n=k+1$ のとき成り立つ

(i)，(ii) より すべての自然数 n に対して与えられた不等式が成り立つことは真である ▨