

2017年 工学科学 第3問

3 a を正の実数とし、 n を自然数とする。 i を虚数単位とし、複素数 $z_n = 1 + \frac{a}{n}i$ を考え、 $r_n = |z_n|$ 、 $\theta_n = \arg z_n$ ($0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$) とおく。このとき次の問いに答えよ。ただし、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき不等式

$$\sin x < x < \tan x$$

が成り立つことを証明なしに用いてよい。

- (1) 関数 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ の $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲における増減を調べよ。
- (2) 不等式 $n\theta_n < (n+1)\theta_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ。
- (3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n\theta_n$ および $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n)^n$ を求めよ。