熊本大学

2014年 第3問

$\boxed{3}$ 放物線$C: y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$が点P(1, -2)とQ(5, 10)を通るとし，P，QにおけるCの接線をそれぞれℓ，mとする．以下の問いに答えよ．

(1) b，cをそれぞれaを用いて表せ．

(2) ℓとmの交点のy座標が-4であるとき，a，b，cを求めよ．

(3) (2)で求めたa，b，cについて，放物線Cとℓ，mで囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) Pを通ることから．$-2 = a + b + c \cdots ①$

Qを通ることから．$10 = 25a + 5b + c \cdots ②$

②−①より．$12 = 24a + 4b$　$\therefore \underline{b = -6a + 3}$ //

②−①×5より．$20 = 20a - 4c$　$\therefore \underline{c = 5a - 5}$ //

(2) (1)より $C: y = ax^2 + (-6a+3)x + 5a - 5$

$\therefore y' = 2ax - 6a + 3$

$\therefore \ell: y = (-4a+3)(x-1) - 2$　　$\therefore \ell: y = (-4a+3)x + 4a - 5$

$m: y = (4a+3)(x-5) + 10$　　$\therefore m: y = (4a+3)x - 20a - 5$

$\therefore (-4a+3)x + 4a - 5 - (4a+3)x + 20a + 5 = 0$

$8ax = 24a$　　$a \neq 0$より．交点のx座標は $x = 3$

このとき $y = -8a + 4$　$\therefore -8a + 4 = -4$　$\therefore \underline{a = 1,\ b = -3,\ c = 0}$ //

(3) (2)のとき．$y = x^2 - 3x$

$$S = \int_1^3 x^2 - 3x - (-x-1)\,dx + \int_3^5 x^2 - 3x - (7x - 25)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^3 + \left[\frac{1}{3}(x-5)^3\right]_3^5$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{8}{3}$$

$$= \underline{\frac{16}{3}}$$ //