広島大学

2010年 第3問　1枚目／2枚

数理 石井K

3 $t>1$ を満たす実数 t に対して，$S(t)=\int_0^1 |xe^x - tx|\,dx$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，方程式 $xe^x = tx$ を満たす x をすべて求めよ．

(2) $S(t)$ を求めよ．

(3) $S(t)$ を最小にする t の値を求めよ．

(1) $xe^x = tx \iff x(e^x - t) = 0$

よって，$\begin{cases} 1<t\leqq e \text{ のとき，} & x=0,\ \log t \\ t>e \text{ のとき，} & x=0 \end{cases}$ //

(2) (i) $1<t\leqq e$ のとき，

$0\leqq x\leqq \log t$ においては，$xe^x - tx \leqq 0$

$\log t\leqq x\leqq 1$ においては，$xe^x - tx \geqq 0$

よって，$S(t)=\int_0^{\log t} tx - xe^x\,dx + \int_{\log t}^1 xe^x - tx\,dx$

$$= \left[\frac{t}{2}x^2\right]_0^{\log t} - \int_0^{\log t} x(e^x)'dx + \int_{\log t}^1 x(e^x)'dx - \left[\frac{t}{2}x^2\right]_{\log t}^1$$

$$= \frac{t}{2}(\log t)^2 - \left[xe^x\right]_0^{\log t} + \int_0^{\log t} e^x dx + \left[xe^x\right]_{\log t}^1 - \int_{\log t}^1 e^x dx - \frac{t}{2} + \frac{t}{2}(\log t)^2$$

$$= t(\log t)^2 - \frac{t}{2} - t\log t + \left[e^x\right]_0^{\log t} + e - t\log t - \left[e^x\right]_{\log t}^1$$

$$= t(\log t)^2 - \frac{t}{2} - 2t\log t + t - 1 + e - e + t$$

$$= t(\log t)^2 + \frac{3}{2}t - 2t\log t - 1$$

(ii) $t\geqq e$ のとき，

$0\leqq x\leqq 1$ において，$xe^x - tx \leqq 0$ より

$$S(t) = \int_0^1 tx - xe^x\,dx$$

$$= \left[\frac{t}{2}x^2\right]_0^1 - \int_0^1 x(e^x)'dx$$

$$= \frac{t}{2} - \left[xe^x\right]_0^1 + \left[e^x\right]_0^1$$

$$= \frac{t}{2} - e + e - 1$$

$$= \frac{t}{2} - 1$$

2010年 第3問

2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ $t>1$ を満たす実数 t に対して，$S(t)=\int_0^1 |xe^x - tx|\,dx$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，方程式 $xe^x = tx$ を満たす x をすべて求めよ．

(2) $S(t)$ を求めよ．

(3) $S(t)$ を最小にする t の値を求めよ．

(2) のつづき

(i), (ii) より，
$$S(t)=\begin{cases} t(\log t)^2+\frac{3}{2}t-2t\log t-1 & (1<t\leqq e \text{ のとき}) \\ \frac{t}{2}-1 & (t\geqq e \text{ のとき}) \end{cases}$$ //

(3) (2) より，$t \geqq e$ のときの最小値は $S(e)=\frac{e}{2}-1$

$1<t\leqq e$ のときを考える．

$$S'(t)=(\log t)^2+t\cdot 2\log t\cdot\frac{1}{t}+\frac{3}{2}-2\log t-2$$
$$=(\log t)^2-\frac{1}{2}$$

$\therefore$ $S'(t)=0$ となるのは，$\log t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ すなわち，$t=e^{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$t>1$ であるから，$t=e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

t	(1)	$\cdots$	$e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$	$\cdots$	e
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		↘		↗	$\frac{e}{2}-1$

$$\left(\begin{aligned} S(e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}) &= e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-\sqrt{2}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-1 \\ &= (2-\sqrt{2})e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-1 \end{aligned}\right)$$
なくても O.K.

増減表と，$t\geqq e$ のときをあわせて，

$S(t)$ を最小にする t は，$\underline{t=e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$ //