

2016年都市教養(理系)第1問

1 曲線  $y = \log x$  を  $C$  で表す.  $1 < p < e$  をみたす実数  $p$  に対し, 曲線  $C$  上の点  $P(p, \log p)$  における接線を  $l$  とし,  $l$  の方程式を  $y = ax + b$  とする. ただし,  $\log x$  は自然対数とし,  $e$  は自然対数の底とする. 以下の問いに答えなさい.

- (1)  $a$  を  $p$  の式で表しなさい.
- (2)  $b$  を  $p$  の式で表しなさい.
- (3)  $x$  軸と直線  $l$  および曲線  $C$  で囲まれた図形  $D_1$  の面積を  $p$  の式で表しなさい.
- (4)  $x$  軸と  $y$  軸および直線  $l$  で囲まれた図形を  $D_2$  とする.  $D_1$  の面積と  $D_2$  の面積が等しいとき,  $p$  の値を求めなさい.

(1)  $y' = \frac{1}{x}$  より,  $l$  の傾きは  $\frac{1}{p}$

よって,  $a = \frac{1}{p}$  //

(2)  $l: y = \frac{1}{p}(x-p) + \log p$

よって,  $l: y = \frac{1}{p}x + \log p - 1$

$\therefore b = \log p - 1$  //

(3)  $D_1$  の面積を  $S_1$  とおく

$l$  と  $x$  軸との交点を求めると,  $(p - p \log p, 0)$  であるから

$$S_1 = \triangle - \triangle$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \{p - (p - p \log p)\} \cdot \log p - \int_1^p \log x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot p (\log p)^2 - [x \log x]_1^p + \int_1^p dx$$

$$= \frac{1}{2} p (\log p)^2 - p \log p + p - 1 //$$

(4)  $D_2$  の面積を  $S_2$  とおく

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot (p - p \log p) \cdot (1 - \log p)$$

$$= \frac{1}{2} p (\log p)^2 - p \log p + \frac{1}{2} p$$

$$\therefore S_1 = S_2 \iff p - 1 = \frac{1}{2} p$$

$$\iff \underline{p = 2} // \text{これは } 1 < p < e \text{ をみたす.}$$

