0002129720787999

山口大学

2015年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ a，bを定数とする．空間内に4点A(1, 5, 9)，B(3, 4, 8)，C(2, 6, 7)，D(a, b, 12)がある．△ABCの重心をGとする．AG ⊥ DG，BG ⊥ DGであるとき，次の問いに答えなさい．

(1) 点Gの座標とa，bの値を求めなさい．

(2) ∠BACの大きさを求めなさい．

(3) △ABCの面積を求めなさい．

(4) 点A，B，C，Dを頂点とする四面体の体積を求めなさい．

(1) $G\left(\frac{1+3+2}{3}, \frac{5+4+6}{3}, \frac{9+8+7}{3}\right)$ $\therefore \underline{G(2, 5, 8)}$ //

$\therefore \overrightarrow{AG} = (1, 0, -1)$，$\overrightarrow{BG} = (-1, 1, 0)$，$\overrightarrow{DG} = (2-a, 5-b, -4)$

AG ⊥ DGより．$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{DG} = 0$，BG ⊥ DGより．$\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{DG} = 0$

$\therefore \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{DG} = 2-a+4 = 0$ $\therefore \underline{a=6}$ //

$\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{DG} = a-2+5-b = 0$ $\therefore \underline{b=9}$ //

(2) $\cos\angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$ …①

ここで $\overrightarrow{AB} = (2, -1, -1)$，$\overrightarrow{AC} = (1, 1, -2)$ より．$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2-1+2 = 3$

①に代入して．$\cos\angle BAC = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$ $\therefore \underline{\angle BAC = 60^\circ}$ //

(3) $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cdot\sin 60^\circ$

$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \underline{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ //

(4) (四面体の体積) $= \frac{1}{3}\times\triangle ABC\times DG$ （∵ AG ⊥ DG, BG ⊥ DGより．平面ABC ⊥ DG）

(1)より $\overrightarrow{DG} = (-4, -4, -4)$ $\therefore |\overrightarrow{DG}| = 4\sqrt{3}$

$\therefore$ (四面体の体積) $= \frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times 4\sqrt{3}$

$= \underline{6}$ //