2015 年 理（数） 第 2 問

$\boxed{2}$ s を $-1 \leqq s \leqq 1$ を満たす実数とする．xy 平面上のベクトル $\overrightarrow{a_s}$，$\overrightarrow{b_s}$，$\overrightarrow{c_s}$ を

$$\overrightarrow{a_s} = \left(s,\ \sqrt{1-s^2}\right),\quad \overrightarrow{b_s} = \left(\sqrt{1-s^2},\ -s\right),\quad \overrightarrow{c_s} = \left(s\sqrt{1+s^2},\ \sqrt{1-s^4}\right)$$

と定める．t を実数とし，$f_t(s)$，$g_t(s)$，$h_t(s)$，$k_t(s)$ を

$$\overrightarrow{a_s} + \frac{t}{|\overrightarrow{b_s}|}\overrightarrow{b_s} = (f_t(s),\ g_t(s))$$

$$\overrightarrow{a_s} - \frac{t}{|\overrightarrow{c_s}|}\overrightarrow{c_s} = (h_t(s),\ k_t(s))$$

により定める．さらに，s を媒介変数とする 2 つの曲線

$$C_t : x = f_t(s),\ y = g_t(s) \quad \left(-\frac{1}{2} \leqq s \leqq 1\right),$$

$$K_t : x = h_t(s),\ y = k_t(s) \quad (-1 \leqq s \leqq 1)$$

を考える．次の各問いに答えよ．

(1) $f_t(s)$，$g_t(s)$，$h_t(s)$，$k_t(s)$ を s と t を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{a_s}$ と $\overrightarrow{b_s}$ のなす角，および，$\overrightarrow{a_s}$ と $\overrightarrow{c_s}$ のなす角を求めよ．

(3) $f_t(s)^2 + g_t(s)^2$ を t のみを用いて表せ．

(4) t が 0 から $\sqrt{3}$ まで動くとき，C_t が通過する部分を D とする．D を図示せよ．

(5) (4) で定めた D の面積を求めよ．

(6) (4) で定めた D を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積を求めよ．

(7) $K_{\frac{1}{2}}$，K_1，$K_{\frac{3}{2}}$ を図示せよ．

(8) t が $\frac{1}{2} \leqq |t-1| \leqq 1$ を満たす範囲を動くとき，K_t が通過する部分の面積を求めよ．