2017 年 神学・経済 第 4 問

4 正の整数 a と b の最大公約数は，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を使って以下のように求めることができる．

$$a_1 = a, \quad b_1 = b$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} b_n & (b_n \neq 0 \text{ のとき}) \\ a_n & (b_n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$b_{n+1} = \begin{cases} a_n \text{ を } b_n \text{ で割った余り} & (b_n \neq 0 \text{ のとき}) \\ b_n & (b_n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

a_n を b_n で割った商を q_n とし，N は $b_N = 0$ を満たす最小の自然数とする．このとき，a_N が a と b の最大公約数となる．

(1) $a = 81$，$b = 63$ のとき，$a_3 = \boxed{\text{ツテ}}$，$b_3 = \boxed{\text{ト}}$，$N = \boxed{\text{ナ}}$ である．

(2) 81 と 63 の最大公約数は $\boxed{\text{ニ}}$ である．

(3) 以上の計算により，

$$81 = 63q_1 + b_k$$

$$63 = b_k q_2 + 9$$

という関係が成り立つ．このとき，$k = \boxed{\text{ヌ}}$ である．この 2 つの式から b_k を消去することで，不定方程式 $81x + 63y = 9$ を満たす整数 x，y の組のうち，$-10 < x < 4$ となるものは，$x = \boxed{\text{ネノ}}$，$y = \boxed{\text{ハ}}$ であることがわかる．