2013年 文系 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 1個のさいころを n 回投げ，出た目の最大値を X_n とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) X_n が k 以下である確率 p_k を求めよ．ただし，$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ とする．

(2) X_n が k である確率 q_k を求めよ．ただし，$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ とする．

(3) X_n の期待値を $n=2$ の場合に求めよ．

(4) X_n の期待値が4.5以上となる n の範囲を求めよ．

(1) n 回とも k 以下の目が出ればよいので

$$p_k = \left(\frac{k}{6}\right)^n$$

(2) (1)より，X_n が $k-1$ $(k \geqq 2)$ 以下であるのは，$p_{k-1} = \left(\frac{k-1}{6}\right)^n$

$$\therefore q_k = p_k - p_{k-1} = \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n = \frac{k^n-(k-1)^n}{6^n}$$

これは $k=1$ のときも成り立つ

(3) (2)より，

$$E(X_2) = \sum_{k=1}^{6} k \cdot q_k$$

$$= 1\cdot\frac{1^2}{6^2} + 2\cdot\left(\frac{2^2}{6^2}-\frac{1^2}{6^2}\right) + 3\left(\frac{3^2}{6^2}-\frac{2^2}{6^2}\right) + 4\left(\frac{4^2}{6^2}-\frac{3^2}{6^2}\right)$$

$$+ 5\cdot\left(\frac{5^2}{6^2}-\frac{4^2}{6^2}\right) + 6\left(\frac{6^2}{6^2}-\frac{5^2}{6^2}\right)$$

$$= \frac{6^3-(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)}{36}$$

$$= \frac{161}{36}$$

(4) (3)と同様にすると，

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^{6} k \cdot q_k = \frac{6^n-(1^n+2^n+3^n+4^n+5^n)}{6^n}$$

$$\therefore E(X_n) \geqq 4.5 \iff 6^{n+1}-(1^n+2^n+3^n+4^n+5^n) \geqq 4.5\cdot 6^n$$

$$\iff 1.5\times 6^n \geqq 1^n+2^n+3^n+4^n+5^n$$

$$\iff \left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{6}\right)^n+\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{4}{6}\right)^n+\left(\frac{5}{6}\right)^n \leqq 1.5$$

(左辺)は単調減少の関数 かつ $n=2$ のときは成り立たず，$n=3$ のとき (左辺)$=\frac{225}{216} < 1.5$

となり，成り立つので $n \geqq 3$ において成り立つ

$$\therefore n \geqq 3$$