0002315814867999

広島工業大学

2016年 工・情報・環境学部 (A) 第4問

増田

$\boxed{4}$ 座標平面において，連立不等式 $\begin{cases} y \geqq x^2 - 2x \\ y - x \leqq 0 \end{cases}$ の表す領域を D とする．次の問いに答えよ．

(1) Dを図示せよ．

(2) Dの点$(x,\ y)$に対して $x+y=a$ とする．aの最大値と最小値，およびそのときのx, yを求めよ．

(3) Dの点$(x,\ y)$に対して $xy=b$ とする．bの最大値と最小値，およびそのときのx, yを求めよ．

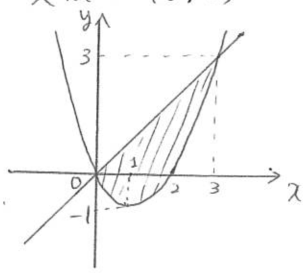
(1) $y=x^2-2x$ と $y-x=0$ の交点は

$x=x^2-2x$

$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

交点は $(0,0)$ と $(3,3)$



領域Dは左図の斜線部分。ただし境界を含む。

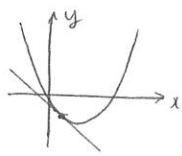
(2) $x+y=a \iff y=-x+a$

領域D と $y=-x+a$ の直線が共有点をもつとき、その最大は $(3,3)$ を通るとき。

$3=-3+a$　　$\therefore a=6$ (最大)

$(x,y)=(3,3)$ //

最小は



$y=x^2-2x$ と $y=-x+a$ が接するとき。

接点における傾きが -1 なので、

$2x-2=-1$

$\therefore x=\frac{1}{2}$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$

$a=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$ (最小)

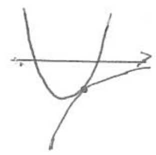
$(x,y)=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$ //

(3) $xy=b \iff y=\frac{b}{x}$ (反比例)

bが最大となるのは、$(3,3)$を通るときで　$3=\frac{b}{3}$　$\therefore b=9$ (最大)

$(x,y)=(3,3)$ //

bが最小となるのは、$b<0$ で $y=x^2-2x$ のグラフと $y=\frac{b}{x}$ のグラフが接するとき。

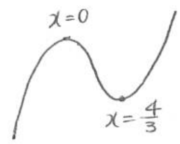


$x^2-2x=\frac{b}{x}$ より、

$b=g(x)=x^3-2x^2$ とおく。

$g'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)$

よって $y=g(x)$ のグラフは右図のようになり、$0\leqq x\leqq 3$ (領域D) で $y=b(<0)$ と1つだけ交点(接点)をもつのは、$x=\frac{4}{3}$ のとき。



$x=\frac{4}{3}$ のとき、$y=\left(\frac{4}{3}\right)^2-2\cdot\frac{4}{3}=-\frac{8}{9}$

$b=xy=\frac{4}{3}\times\left(-\frac{8}{9}\right)=-\frac{32}{27}$

$\therefore b=-\frac{32}{27}$ (最小)

$(x,y)=\left(\frac{4}{3},-\frac{8}{9}\right)$ //