2014 年 第 5 問

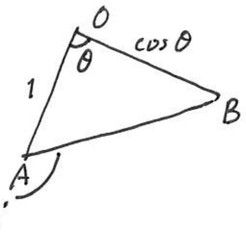
5 空間の点 O，A，B に対して，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角を θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=\cos\theta$ であるとき，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{AB}$ のなす角を求めよ．さらに，$\triangle$OAB の面積の最大値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

(2) $|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=\cos\theta+2\sin\theta$ であるとき，$\triangle$OAB の面積の最大値を求めよ．ただし，そのときの θ の値は求めなくてよい．

(3) $|\overrightarrow{OA}|=\cos\theta$，$|\overrightarrow{OB}|=1-\cos\theta$ であるとき，$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2$ の最小値を求めよ．ただし，そのときの θ の値は求めなくてよい．

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cdot\cos\theta=\cos^2\theta$



$|\overrightarrow{AB}|^2=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})^2=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$

$\therefore \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})}{\sin\theta}=-\sin\theta=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore$ なす角は $\underline{\theta+\frac{\pi}{2}}$ //　　$S=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta=\frac{1}{4}\sin2\theta$

$\therefore$ $\underline{\theta=\frac{\pi}{4}\text{ のとき．最大値 }\frac{1}{4}}$ //

(2) $S=\frac{1}{2}\cdot(\cos\theta+2\sin\theta)\cdot\sin\theta=\frac{1}{4}\sin2\theta+\frac{1-\cos2\theta}{2}$

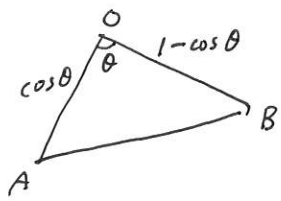
$=\frac{\sqrt5}{4}\sin(2\theta-\alpha)+\frac{1}{2}$ $\left(\alpha\text{ は }\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt5},\ \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt5}\right)$

$\therefore$ $\underline{\text{最大値 }\frac{\sqrt5}{4}+\frac{1}{2}}$ //

$-\alpha<2\theta-\alpha<\pi-\alpha$

$\therefore$ $2\theta-\alpha=\frac{\pi}{2}$ は範囲内

(3) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos^2\theta(1-\cos\theta)$



$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=\cos^2\theta+(1-\cos\theta)^2+2\cos^2\theta(1-\cos\theta)$

$f(t)$ とおく　$=-2\cos^3\theta+4\cos^2\theta-2\cos\theta+1$

$t=\cos\theta$ とおくと $(0<t<1)$　$f(t)=-2t^3+4t^2-2t+1$　$\therefore f'(t)=-6t^2+8t-2$

$0<t<1$ より $f'(t)=0$ となるのは $t=\frac{1}{3}$

t	(0)	…	$\frac{1}{3}$	…	(1)
$f'(t)$		−	0	+	
$f(t)$		↘		↗	

$\therefore$ 最小値は $f\left(\frac{1}{3}\right)=\underline{\frac{19}{27}}$ //