香川大学

2016年 医学部 第1問

$\boxed{1}$ 3つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を次のように定める.

$$a_1 = 3,\quad b_1 = 2,\quad c_1 = 1,$$
$$a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{4},$$
$$b_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{4},$$
$$c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{4} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき, 次の問に答えよ.

(1) $a_n + b_n + c_n$ を n を用いて表せ.

(2) $a_n - b_n$, $a_n - c_n$ をそれぞれ n を用いて表せ.

(3) a_n, b_n, c_n をそれぞれ n を用いて表せ.

(1) $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n + c_n)$

∴ 数列 $\{a_n + b_n + c_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 + c_1 = 6$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列より,

$a_n + b_n + c_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ // $\cdots$ ①

(2) $a_{n+1} - b_{n+1} = -\frac{1}{4}(a_n - b_n)$

∴ 数列 $\{a_n - b_n\}$ は初項 $a_1 - b_1 = 1$, 公比 $-\frac{1}{4}$ の等比数列より,

$a_n - b_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ // $\cdots$ ②

$a_{n+1} - c_{n+1} = -\frac{1}{4}(a_n - c_n)$

∴ 数列 $\{a_n - c_n\}$ は初項 $a_1 - c_1 = 2$, 公比 $-\frac{1}{4}$ の等比数列より,

$a_n - c_n = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ // $\cdots$ ③

(3) ① + ② + ③ より, $3a_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$　∴ $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ //

②, ③ にそれぞれ代入して,

$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$, $c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ //