2014年第1問

1 aを実数とし，$a>1$とする．3個の関数を

$$f(x)=-2x^2+2ax,\quad g(x)=-x^2+a^2,\quad h(x)=-2ax+2a^2$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) すべての実数xに対して，$f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$となることを示せ．

(2) 連立不等式

$$0 \leqq x \leqq 1,\quad g(x) \leqq y \leqq h(x)$$

で表される領域の面積S_1をaを用いて表せ．

(3) 連立不等式

$$1 \leqq x \leqq a,\quad f(x) \leqq y \leqq g(x)$$

で表される領域の面積S_2をaを用いて表せ．

(4) $S(a)=S_1-S_2$の最大値を求めよ．

(1) まず $f(x) \leqq g(x)$ を示す．

$$g(x)-f(x) = x^2-2ax+a^2 = (x-a)^2 \geqq 0$$

次に，$h(x) \geqq g(x)$ を示す

$$h(x)-g(x) = x^2-2ax+a^2 = (x-a)^2 \geqq 0$$

以上より，$f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$ ■

(1)より常に $g(x) \leqq h(x)$ なので

(2)
$$S_1 = \int_0^1 h(x)-g(x)\,dx = \int_0^1 (x-a)^2\,dx = \left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_0^1 = \underline{a^2-a+\frac{1}{3}}\ //$$

(3)
$$S_2 = \int_1^a g(x)-f(x)\,dx = \int_1^a (x-a)^2\,dx = \left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_1^a = \underline{\frac{1}{3}(a-1)^3}\ //$$

(4) (2), (3) より．

$$S(a) = a^2-a+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(a^3-3a^2+3a-1) = -\frac{1}{3}(a^3-6a^2+6a-2)$$

$$\therefore S'(a) = -\frac{1}{3}(3a^2-12a+6) = -(a^2-4a+2)$$

$\therefore S'(a)=0$ となるのは．$a=2\pm\sqrt{2}$　$a>1$ より $a=2+\sqrt{2}$

$\therefore$ 増減表より

a	(1)	$\cdots$	$2+\sqrt{2}$	$\cdots$
$S'(a)$		+	0	−
$S(a)$		↗		↘

最大値は

$$S(2+\sqrt{2}) = \underline{2+\frac{4}{3}\sqrt{2}}\ //$$