

2012年文系第2問

2 関数 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよ。

(2) $f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + f(x)^2}$ を示せ。

(3) すべての自然数 n に対して $b_n = f\left(\frac{1}{2^n}\right)$ は無理数であることを、数学的帰納法を用いて示せ。ただし、有理数 r, s を用いて表される実数 $r + s\sqrt{2}$ は $s \neq 0$ ならば無理数であることを、証明なく用いてもよい。