0000238541679999

高崎経済大学

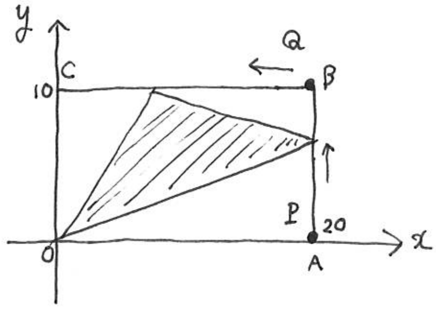
2010年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 座標平面上に O(0, 0)，A(20, 0)，B(20, 10)，C(0, 10) を頂点とする長方形がある．点 P は A を出発して，辺 AB 上を毎秒 1 の速さで B に向かって進み，点 Q は，点 P と同時に B を出発して，辺 BC 上を毎秒 2 の速さで C に向かって進む．以下の問に答えよ．

(1) 点 P が B に達するまでに，△OPQ の面積が最小になるのは，出発してから何秒後か．また，その最小の面積を求めよ．

(2) 点 P が B に達するまでの △OPQ の重心の軌跡を求めよ．



(1) t 秒後の P, Q の座標は

$P(20, t)$, $Q(20-2t, 10)$ $(0 \leqq t \leqq 10)$

△OPQ の面積 S は，長方形から直角三角形を3つ引いて，

$$S = 20\times 10 - \frac{1}{2}\times 20\times t - \frac{1}{2}\times 10\times(20-2t) - \frac{1}{2}\times 2t\times(10-t)$$

$$= 200 - 10t - 100 + 10t - 10t + t^2$$

$$= t^2 - 10t + 100$$

$$= (t-5)^2 + 75$$

∴ S の最小値は $S = 75$（5秒後）//

(2) 重心を $G(X, Y)$ とおくと，(1) より $X = \dfrac{20+20-2t}{3}$，$Y = \dfrac{t+10}{3}$

ただし，$(0 \leqq t \leqq 10)$

∴ $3X = 40 - 2t$，$3Y = t + 10$

∴ $3X = 40 - 2\cdot(3Y - 10)$

∴ $Y = -\frac{1}{2}X + 10$　　また，$0 \leqq t = 20 - \frac{3}{2}X \leqq 10$ ⇔ $\frac{20}{3} \leqq X \leqq \frac{40}{3}$

∴ 求める軌跡は直線 $y = -\frac{1}{2}x + 10$ $\left(\frac{20}{3} \leqq x \leqq \frac{40}{3}\right)$ //